Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 11

O funcionamento de uma co-inceneradora imaginária (num pequeno país imaginário) depende de três variáveis: a temperatura, x; a concentração do produto químico A, dada por y; e a concentração do produto químico B, dada por z. Essas variáveis satisfazem as seguintes condições:

$$F_1(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 = 0, \quad F_2(x, y, z) = y + z - 2 = 0.$$

Uma comissão científica (imaginária), nomeada para estudar o processo, determinou que a taxa de emissão de dioxinas é dada por $f(x, y, z) = (x-1)^2 + yz - 2z + 5$.

Quais são os valores das variáveis x, y, z que garantem o funcionamento mais favorável da co-inceneradora, do ponto de vista ambiental ?

Solução: A condição $F_1(x, y, z) = 0$ descreve um cilindro vertical de raio 1, com o eixo dado pela recta $(1, 1, z)$. A condição $F_2 = 0$ descreve um plano de equação $y + z = 2$. A intersecção destas duas superfícies fornece uma elipse, E, que é uma variedade-1.

Para encontrarmos os valores dos parâmetros que correspondem à menor taxa de emissão de dioxinas, devemos encontrar o mínimo da função f em E. (Note-se que f é contínua e que E é compacta, pelo que certamente haverá um máximo e um mínimo de f em E.) Para isso vamos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange.

Todas as funções envolvidas são de classe C^1.

Temos que $\nabla F_1(x, y, z) = (2(x-1), 2(y-1), 0)$ e $\nabla F_2(x, y, z) = (0, 1, 1)$. Note-se que estes dois vectores são independentes em todos os pontos de E: não há nenhum ponto de E com $x = y = 1$. Confirmamos assim que E é uma variedade-1. Além disso, $\nabla F_1(x, y, z)$ e $\nabla F_2(x, y, z)$ constituem uma base do espaço normal a E em $(x, y, z) \in E$.

Tem-se que $\nabla f(x, y, z) = (2(x-1), z, y-2)$. De acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, para que f tenha um extremo em $p = (x, y, z) \in E$, é necessário que existam números reais λ_1 e λ_2 tais que:

$$F_1(x, y, z) = 0, \; F_2(x, y, z) = 0, \; \nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla F_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla F_2(x, y, z)$$

ou seja, temos as seguintes cinco equações com cinco incógnitas:

$$\begin{gathered} (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \\ 2(x-1) = 2\lambda_1(x-1) \\ z = 2\lambda_1(y-1) + \lambda_2 \\ y - 2 = \lambda_2. \end{gathered}$$

A terceira equação implica que $x = 1$ ou $\lambda_1 = 1$.

Se $x = 1$, então $y = 0$ ou $y = 2$.

Se $y = 0$, temos $z = 2$ e $\lambda_2 = -2$, o que dá $\lambda_1 = -2$. Obtemos assim uma solução $p_1 = (1, 0, 2)$.

Se $y = 2$, temos $z = 0$ e $\lambda_2 = 0$, o que dá $\lambda_1 = 0$. Obtemos outra solução, $p_2 = (1, 2, 0)$.

Se $\lambda_1 = 1$ então $y = 3/2$, o que dá $z = 1/2$ e $\lambda_2 = -1/2$ e $x = 1 \pm \sqrt{3}/2$. Obtemos assim mais duas soluções $p_3 = (1 + \sqrt{3}/2, 3/2, 1/2)$ e $p_4 = (1 - \sqrt{3}/2, 3/2, 1/2)$.

Calculando os valores de f temos que: $f(p_1) = 1, f(p_2) = 5, f(p_3) = 11/2, f(p_4) = 11/2$. Logo, a emissão de dioxinas é menor para $p_1 = (1, 0, 2)$.

Note-se que podemos concluir que p_1 é o mínimo e que p_3 e p_4 são máximos. Quanto a p_2 é um mínimo relativo. Se percorrermos a curva E, no sentido anti-horário de quem olha para o semi-eixo positivo dos z, partindo de p_1, f começa pelo valor 1 e vai aumentando. Depois, passamos em p_3 onde f tem o valor máximo de $11/2$, e após isso f atinge um mínimo relativo em p_2 com o valor 5, e começa a crescer. De seguida passamos por outro máximo em p_4, após o que se regressa a p_1.

Nota: É rejeitada toda e qualquer responsabilidade em caso de uso indevido dos resultados deste exercício na construção (eventual) de co-inceneradoras reais.