

**Análise Matemática III**  
**1º Semestre de 2000/2001**

**Exercício resolvido 11**

Decomponha 1 numa soma de quatro números não negativos cujo produto seja máximo.

**Solução:** O problema pode ser visto como a determinação do máximo da função  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y, z, w) = xyzw$$

no conjunto

$$D = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 1, x, y, z, w \geq 0\}.$$

Este máximo tem que existir porque  $f$  é contínua e  $D$  é compacto (ou seja, limitado e fechado). Por outro lado, é fácil ver que não ocorre na intersecção de  $D$  com os planos coordenados  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  ou  $w = 0$ , já que nestas intersecções  $f = 0$ , ao passo que  $f$  é positiva nos restantes pontos de  $D$ .

Os extremos de  $f$  ao longo da variedade definida pela equação

$$x + y + z + w - 1 = 0 \Leftrightarrow F(x, y, z, w) = 0$$

são dados pelo método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla F \\ F = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yzw = \lambda \\ xzw = \lambda \\ xyw = \lambda \\ xyz = \lambda \\ x + y + z + w - 1 = 0 \end{cases}$$

Estas equações juntamente com  $x, y, z, w \neq 0$  implicam

$$x = y = z = w = \frac{1}{4}$$

que tem então que ser a única solução do problema.