Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 10

Determine o mínimo absoluto da função $f(x,y,z) = x+y+z$ sobre a bola fechada $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Solução: Note-se que $D = U \cup S$, em que

$$U = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 < 1\} \ ; \quad S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

Além disso, S é uma variedade-2 correspondente ao nível zero da função $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. Sendo f uma função contínua e D um conjunto compacto (limitado e fechado), f tem máximo em D.

Dado que $Df(x,y,z) = (1,1,1)$, a função f não tem pontos críticos em U (interior de D). Resta-nos, assim, determinar os extremos de f sobre a variedade S (fronteira de D). Para tal, usemos o método dos multiplicadores de Lagrange que consiste em determinar os pontos críticos da função $g = f + \lambda F$:

$$\begin{cases} 1+2\lambda x &= 0 \\ 1+2\lambda y &= 0 \\ 1+2\lambda z &= 0 \end{cases}$$

Portanto, temos $x = y = z = -\frac{1}{2\lambda}$.

Dado que $x^2+y^2+z^2 = 1$, obtemos $x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Mas $f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}$ e $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\sqrt{3}$ e concluimos que o máximo de f é $\sqrt{3}$ no ponto $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.