Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 10

Considere a variedade

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 3\}.$$

Descreva M parametricamente e determine a respectiva dimensão. Determine o espaço tangente e normal a M no ponto $(1, 2, 3)$.

Solução:

M consiste num elipsóide e é portanto uma variedade diferencial de dimensão 2, ou seja uma superfície. Para verificarmos este facto, observamos que M pode ser descrita como o conjunto das soluções da equação

$$F(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 3 = 0.$$

F é uma função de classe C^1 e temos que $\nabla F(x, y, z) = (2x, y/2, 2z/9)$. $\nabla F = 0$ só se $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, mas a origem não faz parte do conjunto das soluções da condição $F(x, y, z) = 0$. Assim, $\nabla F \neq 0$ em todos os pontos de M, que é portanto uma variedade-2.

A maneira mais fácil de parametrizar M é utilizando-se coordenadas esféricas adaptadas à sua forma elipsoidal. Assim definimos coordenadas em $\mathbb{R}^3$: $x = r\cos(\theta)\sin(\phi)$, $y = 2r\sin(\theta)\sin(\phi)$ e $z = 3r\cos(\phi)$. Note-se que $0 < r < +\infty, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi$. Consequentemente nos pontos do semi-plano com $x \geq 0, y = 0$ este sistema de coordenadas não está definido - veja-se o comentário mais à frente.

Nestas coordenadas, a equação que define M é simplesmente $r = \sqrt{3}$. Isto permite encontrar a parametrização $g :]0, 2\pi[\times]0, \pi[\to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, \phi) = (\sqrt{3}\cos(\theta)\sin(\phi), 2\sqrt{3}\sin(\theta)\sin(\phi), 3\sqrt{3}\cos(\phi)).$$

A função g é de classe C^1, é injectiva, e a respectiva derivada

$$Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}\sin(\theta)\sin(\phi) & \sqrt{3}\cos(\theta)\cos(\phi) \\ 2\sqrt{3}\cos(\theta)\sin(\phi) & 2\sqrt{3}\sin(\theta)\cos(\phi) \\ 0 & -3\sqrt{3}\sin(\phi) \end{bmatrix},$$

tem característica igual a 2 (as colunas são linearmente independentes). A imagem de g é o conjunto dos pontos de M, execpto aqueles com $y = 0$ e $x \geq 0$ (que formam meio meridiano do elipsóide), e portanto g constitui uma parametrização desse sub-conjunto aberto relativamente a M.

Para paremetrizarmos uma vizinhança dos pontos de M com $y = 0$ e $x \geq 0$ bastaria repetir o mesmo procedimento, mas definindo, por exemplo, $\tilde{\phi}$ em relação ao eixo dos y e $\tilde{\theta}$ em relação a $-x$. (No entanto, para o nosso objectivo a médio prazo, que é o cálculo de integrais de superfície, a parametrização g seria suficiente, uma vez que a exclusão de meio meridiano não afectará o integral.)

Uma base do espaço tangente a M em $(1, 2, 3)$ pode ser obtida pelas colunas de Dg nesse ponto. Em $(1, 2, 3)$, temos $\cos(\phi) = 1/\sqrt{3}$ e $\sin(\theta) = 1/\sqrt{2}$, logo $\sin(\phi) = \sqrt{2}/\sqrt{3}$ e $\cos(\theta) = 1/\sqrt{2}$. Logo, nesse ponto,

$$Dg = \begin{bmatrix} -1 & 1/\sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} \\ 0 & -3\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

e os vectores $(-1, 2, 0)$ e $(1/\sqrt{2}, \sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ formam uma base do *espaço* tangente a M em $(1, 2, 3)$. O *plano* tangente a M em $(1, 2, 3)$ será então dado pelo conjunto

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (1, 2, 3) + a(-1, 2, 0) + b(1/\sqrt{2}, \sqrt{2}, -3\sqrt{2}), a, b \in \mathbb{R}\}.$$

O espaço normal nesse ponto é então constituído pelos vectores (x, y, z) tais que $(x, y, z) \cdot (-1, 2, 0) = 0$ e $(x, y, z) \cdot (1/\sqrt{2}, \sqrt{2}, -3\sqrt{2}) = 0$. Logo, uma base do *espaço* normal é dada pelo vector $(2, 1, 2/3)$. A *recta* normal a M no mesmo ponto tem então equação $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(2, 1, 2/3), t \in \mathbb{R}$.