Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício Resolvido 10
Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; 0 < z < 1\}.$$

Mostre que M é uma variedade, indicando explicitamente parametrizações cujas imagens cubram M. Determine a dimensão de M.

Solução: O Conjunto M é um pedaço de superfície cilindrica compreendido entre os planos $z = 0$ e $z = 1$, conforme representado na Figura 1.

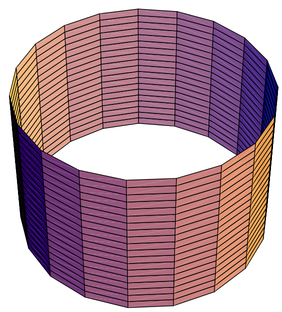

FIGURA 1. A variedade M

Em coordenadas cilíndricas podemos descrever M da forma seguinte

$$\rho = 1; \quad 0 < z < 1.$$

Assim, podemos escrever duas parametrizações, dadas por

$$g_1(\theta, z) = (\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta), z), \qquad (\theta, z) \in \; V_1 =]0, 7\pi/4[\times]0, 1[$$
$$g_2(\theta, z) = (\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta), z), \qquad (\theta, z) \in \; V_2 =]-\pi, 3\pi/4[\times]0, 1[.$$

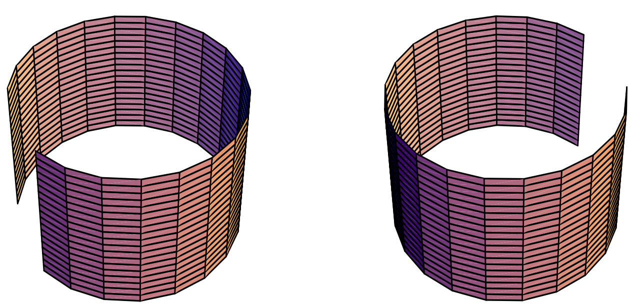

FIGURA 2. Vizinhanças de coordenadas correspondentes às parametrizações g_1 (à esquerda) e g_2 (à direita).

As funções g_1 e g_2 são de classe C^1, injectivas, e têm matrizes jacobianas dadas pela mesma expressão (para valores diferentes de (θ, z)):

$$Dg_1(\theta, z) = Dg_2(\theta, z) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tem caracterítica 2 pois o produto externo

$$(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) \times (0, 0, 1) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0),$$

é diferente de zero, o que implica que as colunas são linearmente independentes. Portanto, g_1 e g_2 são parametrizações. Como $M = g_1(V_1) \cup g_2(V_2)$, concluímos que M é uma variedade de dimensão 2 (igual ao número de variáveis das parametrizações).