Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 1

Esboce detalhadamente o subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x+y+z=3$ e $x+y-z=1$. Discuta as superfícies que se obtêm quando S é cortado por planos paralelos aos planos coordenados.

Solução: A região S tem o seguinte aspecto:

O plano A tem equação $x+y+z=3$ e intersecta o plano xz segundo a recta a de equação $x+z=3; y=0$ e intersecta o plano yz segundo a recta b de equação $y+z=3; x=0$. O plano B é o plano $x+y-z=1$ que intersecta o plano xy segundo a recta e de equação $x+y=1; z=0$, intersecta o plano xz segundo a recta d de equação $x-z=1; y=0$ e intersecta o plano yz segundo a recta f de equação $y-z=1; x=0$. Os planos A e B intersectam-se na recta c de equação $x+y=2; z=1$.

Cortes segundo x constante: Para um $x=x_0$ fixo com $0<x_0<2$ a face dada pelo plano A é cortada pela recta $y+z=3-x_0; x=x_0$ e a face dada pelo plano B é cortada pela recta $y-z=1-x_0; x=x_0$. Para $1<x_0<2$ o corte não intersecta o plano xy. Consequentemente:

Para $0<x_0<1$ os cortes são quadriláteros de lados dados pelas equações: 1) $y+z=3-x_0; x=x_0; 0<y<2-x_0$, 2) $y-z=1-x_0; x=x_0; 1-x_0<y<2-x_0$, 3) $z=0; x=x_0; 0<y<1-x_0$ e 4) $y=0; x=x_0; 0<z<3-x_0$.

Para $1<x_0<2$ os cortes são triângulos de lados dados pelas equações: 1) $y+z=3-x_0; x=x_0; 0<y<2-x_0$, 2) $y-z=1-x_0; x=x_0; 0<y<2-x_0$ e 3) $y=0; x=x_0; x_0-1<z<3-x_0$.

Os cortes segundo y constante são semelhantes mas com os papéis de x e y invertidos, já que a figura é simétrica em relação ao plano $x=y$.

Cortes segundo $z=z_0$ constante: São triângulos. Para $0<z_0<1$ têm lados 1) $y=0; z=z_0; 0<x<1+z_0$, 2) $x=0; z=z_0; 0<y<1+z_0$ e 3) $x+y=1+z_0; z=z_0, x\geq 0, y\geq 0$. Para $1<z_0<3$ têm lados 1) $y=0; z=z_0; 0<x<3-z_0$, 2) $x=0; z=z_0; 0<y<3-z_0$ e 3) $x+y=3-z_0; z=z_0, x\geq 0, y\geq 0$.