Análise Matemática III
1º semestre de 2002/2003

Exercício teste 9 (a entregar na aula prática da semana de 18/11/2002)

1. Num reactor nuclear a temperatura t da água de refrigeração, a pressão p nas paredes do reactor, e a quantidade de urânio u no interior do reactor, satisfazem as seguintes relações

$$\begin{cases} t^2 + 8ue^p = 5, \\ \\ ut^3 + \frac{p}{8u} = -1. \end{cases}$$

No estado actual do reactor estas variáveis assumem os valores $u = 1/8$, $p = 0$ e $t = -2$. Determine se haverá um aumento ou uma diminuição da pressão e da temperatura quando aumentarmos a quantidade de urânio no reactor.

2. Mostre que o conjunto

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1,\ z^2 + w^2 = 1\}$$

é uma variedade de dimensão 2.

Resolução

1. Primeiro observamos que numa vizinhança do ponto $(u, p, t) = (1/8, 0, -2)$ podemos encontrar a pressão e a temperatura como função da quantidade de urânio: $p = p(u)$ e $t = t(u)$. Para isso, basta verificar que a função $F(u, p, t) = (t^2 + 8ue^p - 5, ut^3 + \frac{p}{8u} + 1)$, que define o nosso sistema, satisfaz:

$$\det D_{(p,t)}F\left(\frac{1}{8}, 0, -2\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p} & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial p} & \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{vmatrix}_{\left(\frac{1}{8},0,-2\right)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{11}{2} \neq 0.$$

Assim, assumindo que $p = p(u)$ e $t = t(u)$, diferenciamos o sistema em relação a u, obtendo:

$$\begin{cases} 2t\frac{\partial t}{\partial u} + 8ue^p\frac{\partial p}{\partial u} + 8e^p = 0, \\ \\ t^3 + 3ut^2\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{1}{8u}\frac{\partial p}{\partial u} - \frac{p}{8u^2} = 0. \end{cases}$$

Em $(u,p,t) = (1/8, 0, -2)$ obtemos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial u}\left(\frac{1}{8}\right) \\ \\ \frac{\partial t}{\partial u}\left(\frac{1}{8}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Este sistema tem a solução $\left(\frac{\partial p}{\partial u}\left(\frac{1}{8}\right), \frac{\partial p}{\partial u}\left(\frac{1}{8}\right)\right) = (40/11, 32/11)$. Como estes números são positivos, concluímos que haverá um aumento da pressão e da temperatura quando aumentarmos a quantidade de urânio no reactor.

2. Esta variedade é um conjunto de nível:

$$M = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : F(x,y,z,w) = 0\},$$

onde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a função

$$F(x,y,z,w) = (x^2 + y^2 - 1, z^2 + w^2 - 1).$$

A matriz Jacobiana desta função é

$$DF(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z & 2w \end{bmatrix}$$

que tem característica ("rank") 2 nos pontos de M. Logo M é uma variedade diferenciável de dimensão $4 - 2 = 2$.