Análise Matemática III
2º semestre de 2000/2001

Exercício teste 9 (a entregar na aula prática da semana de 14/5/2001)

Uma partícula desloca-se em $\mathbb{R}^3$, sendo as suas coordenadas no instante t dadas por $x = e^{t-1}+t$, $y = e^{t-1} - t$ e $z = \cos(t-1)$. Considere o movimento da partícula em instantes suficientemente próximos de $t = 1$.

a) Será possível através de uma medição da coordenada x da partícula determinar o instante de tempo t e as suas coordenadas y e z ?

Em caso afirmartivo calcule a derivada de t em ordem a x no instante $t = 1$.

b) E será possível determinar x, z e t com uma medição da coordenada y, perto do instante considerado ?

Solução:

a) No instante $t = 1$ temos que $(x, y, z, t) = (2, 0, 1, 1)$. A trajectória da partícula é determinada por três equações em quatro variáveis: $F_1(x, y, z, t) = x - e^{t-1} - t = 0$, $F_2(x, y, z, t) = y - e^{t-1} + t = 0$ e $F_3(x, y, z, t) = z - \cos(t-1) = 0$. Seja $F = (F_1, F_2, F_3)$. Temos então,

$$DF(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e^{t-1}-1 \\ 0 & 1 & 0 & -e^{t-1}+1 \\ 0 & 0 & 1 & \operatorname{sen}(t-1) \end{bmatrix}$$

e temos portanto que quando $t = 1$

$$DF(2,0,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As colunas correspondentes a y, z, t são independentes logo pelo teorema da função implícita é posível localmente suficientemente perto do ponto $(2, 0, 1, 1)$ escrever y, z, t em função de x. Ou seja existem funções g_1, g_2, g_3 tal que $y = g_1(x)$, $z = g_2(x)$ e $t = g_3(x)$ numa vizinhança de $x = 2$ com $F(x, g_1(x), g_2(x), g_3(x)) = 0$.

Queremos calcular $g_3'(2)$. Seja $h(x) = (x, g_1(x), g_2(x), g_3(x))$. Temos $F(h(x)) = 0$ para todo o x numa vizinhaça de $x = 2$. Logo fazendo a derivada desta função composta obtemos

$$DF(2,0,1,1) \cdot Dh(2) = 0.$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ g_1'(2) \\ g_2'(2) \\ g_3'(2) \end{bmatrix} = 0.$$

Temos então $1 - 2g_3'(2) = 0$ ou seja, $g_3'(2) = 1/2$ que era o que queríamos calcular.

Nota: Também é possível resolver este problema usando o teorema da função inversa do seguinte modo: $\frac{dx}{dt}(1) = 2 \neq 0$. Logo, pelo teorema da função inversa, localmente numa vizinhança de $t = 1$ podemos escrever t em função de x e depois usando esse facto escrever y, z também em função de x. Obtemos então $\frac{dt}{dx}(2) = (\frac{dx}{dt}(1))^{-1} = 1/2$ o que concorda com o cálculo feito acima através do teorema da função implícita. Aliás, é até fácil de ver que $x(t)$ é injectiva pelo que existe inversa global.

b) Da alínea anterior observamos que as colunas de $DF(2,0,1,1)$ correspondentes a x, z, t não são linearmente independentes. Logo o teorema da função implícita *não* pode ser aplicado e não podemos garantir que seja possível escrever x, z, t localmente em função de y. Na verdade, podemos observar que a função $y(t) = e^{t-1} - t$ tem um mínimo em $t = 1$ pelo que um valor de y perto de $y = 0$ determina dois valores de t e não um só, indicando que a resposta à pergunta é negativa.