Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício teste 9

Determine o máximo absoluto da função $f(x,y) = xy$ no disco de raio um e centro na origem de $\mathbb{R}^2$ dado por $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solução: Sejam $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, respectivamente, o interior e a fronteira de D. Em primeiro lugar determinemos os pontos críticos de f em U. Dado que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & y \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & x \end{cases}$$

concluimos que $(0,0)$ é o único ponto crítico de f em U. De seguida consideremos os pontos extremos de f sobre C. Para isso recorremos ao método dos multiplicadores de Lagrange que consiste em determinar os pontos críticos da função $g(x,y) = f(x,y) + \lambda F(x,y)$ sendo $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ a função cujo nível zero é a linha C (variedade-1). Assim, obtemos o seguinte sistema (não linear) de equações:

$$\begin{cases} y + 2\lambda x & = & 0 \\ x + 2\lambda y & = & 0 \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{cases}$$

Das duas primeiras obtemos

$$y = 4\lambda^2 y \Longleftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2} \vee y = \pm x$$

e, da terceira deduzimos

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Portanto, sobre a circunferência C, temos quatro pontos candidatos a mínimos ou máximos de f, a saber,

$$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}});\ (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}});\ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}});\ (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Mas,

$$f(0,0) = 0;\ f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2};\ f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}$$

Portanto, o máximo absoluto de f ocorre em C nos pontos $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Note-se que, sendo f uma função contínua e D um conjunto compacto (limitado e fechado), f tem máximo e tem mínimo em D.