Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício teste 9 (entregar na aula prática da semana de 29/5/00)
Considere a variedade M dada pela equação $x^2+y^2=z^2+1$ sendo $0<z<2$.

a) Descreva M parametricamente e determine a respectiva dimensão.

b) Determine o espaço tangente e o espaço normal a M no ponto $(0,\sqrt{2},1)$.

Solução:

a) Consideremos a função $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1$$

Trata-se de uma função de classe C^1 tal que

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : F(x,y,z)=0\}$$

ou seja, M é o conjunto de nível zero de F.
A derivada

$$DF(x,y,z)=\begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \end{bmatrix}$$

tem característica igual a um em todos os pontos de M. De facto, o ponto de coordenadas $(0,0,0)$ é o único em que isso não acontece. Mas este ponto não pertence a M.
Portanto, M é uma variedade de dimensão dois em $\mathbb{R}^3$.
Em coordenadas cilíndricas a variedade M é dada pela equação $\rho^2=z^2+1$. Assim, consideremos as funções $g:T\to\mathbb{R}^3$ e $h:S\to\mathbb{R}^3$ definidas por

$$\begin{aligned} g(\theta,z) &= ((\sqrt{z^2+1})\cos\theta\,,\,(\sqrt{z^2+1})\operatorname{sen}\theta\,,\,z)\\ h(\theta,z) &= ((\sqrt{z^2+1})\cos\theta\,,\,(\sqrt{z^2+1})\operatorname{sen}\theta\,,\,z)\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} T &= \{(\theta,z): 0<\theta<2\pi\,;\,0<z<2\}\\ S &= \{(\theta,z): -\pi<\theta<\pi\,;\,0<z<2\}\end{aligned}$$

Estas duas funções são de classe C^1, injectivas e as respectivas derivadas são representadas pela mesma matriz

$$\begin{bmatrix} -(\sqrt{z^2+1})\operatorname{sen}\theta & \frac{z}{(\sqrt{z^2+1})}\cos\theta \\ (\sqrt{z^2+1})\cos\theta & \frac{z}{(\sqrt{z^2+1})}\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que tem característica igual a dois, ou seja, as duas colunas são linearmente independentes.
Note-se que

$$\begin{aligned} g(T) &= M\setminus\{(x,y,z): y=0\,;x\geq 0\}\\ h(S) &= M\setminus\{(x,y,z): y=0\,;x\leq 0\}\end{aligned}$$

e, portanto, $M=g(T)\cup h(S)$, o que quer dizer que g e h parametrizam M.
É de salientar que para o cálculo de integrais sobre M, nomeadamente o cálculo da área, basta considerar a função g porque a diferença $M\setminus g(T)$ é apenas uma linha.

b) Dado que $g(\frac{\pi}{2},1)=(0,\sqrt{2},1)$, o espaço tangente a M no ponto $(0,\sqrt{2},1)$ é gerado pelas colunas da matriz

$$Dg(\frac{\pi}{2},1)=\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$T_{(0,\sqrt{2},1)}M=\{(\sqrt{2}\,\alpha,\frac{\sqrt{2}}{2}\beta,\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

e, portanto, é o plano dado pela equação

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\,z$$

O espaço normal a M no ponto $(0,\sqrt{2},1)$ é gerado pela linha da matriz

$$DF(0,\sqrt{2},1)=\begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$T_{(0,\sqrt{2},1)}M^{\perp}=\{\alpha(0,2\sqrt{2},-2):\alpha\in\mathbb{R}\}$$

e, portanto, é a recta dada pelo sistema de equações

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -\sqrt{2}\,z \end{array}$$