Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício teste 9 (a entregar na aula prática da semana de 20/11/2000)

Considere a função definida por

$$f(x,y) = \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \ , \operatorname{sen} x + \cos y\right).$$

a) Será que f é injectiva no seu domínio?

b) Caraterize os pontos em que f é localmente invertível.

c) Sabendo que $f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (2,1)$, determine a derivada $Df^{-1}(2,1)$.

Solução:

a) Consideremos os pontos de $\mathbb{R}^2$ da forma $(x,x)\,;\ x \neq 0$. Então, $f(x,x) = (2, \operatorname{sen} x + \cos x)$ e, portanto,

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = (2,1) \ , \ \forall k \in \mathbb{N}$$

donde se conclui que a função f não é injectiva no seu domínio.

b) A função f é de classe C^1 no seu domínio, ou seja, no subconjunto de $\mathbb{R}^2$ em que $x \neq 0$. Assim, invocando o Teorema da Função Inversa, podemos determinar os pontos em que f é localmente invertível verificando apenas a condição: $\det Df(x,y) \neq 0$.

Mas,

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} -2\frac{y^2}{x^3} & 2\frac{y}{x^2} \\ \cos x & -\operatorname{sen} y \end{bmatrix}$$

e temos

$$\det Df(x,y) = 2\frac{y}{x^2}\left(\frac{y}{x}\operatorname{sen} y - \cos x\right)$$

Portanto, o conjunto de pontos em que f tem inversa local é descrito pela inequação

$$2\frac{y}{x^2}\left(\frac{y}{x}\operatorname{sen} y - \cos x\right) \neq 0$$

Note-se que para os pontos em que $y = 0$, o Teorema da Função Inversa não se aplica.

c) Note-se que

$$\det Df\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \det \begin{bmatrix} -\frac{4}{\pi} & \frac{4}{\pi} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{4}{\pi}$$

e, portanto, existem vizinhanças U de $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e V de $f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (2,1)$ tais que $f: U \to V$ é invertível, $f^{-1}: V \to U$ é de classe C^1 e

$$Df^{-1}(2,1) = \left[Df\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right]^{-1} = \frac{\pi}{4}\begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{\pi} \\ 0 & -\frac{4}{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{4} & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$