

Análise Matemática III

1º semestre de 2001/02

Exercício Teste 9

Ricardo Grandêncio¹, é um prestigiado vereador da cultura e desporto da Câmara de Ribanceira de Baixo. Para manter o cargo necessita de se assegurar que no ano de 2025, em que tinha 24 anos de idade, a derivada do orçamento da cultura v em ordem ao tempo t_1 é negativa, mantendo constante a variável t_2 que mede o tempo do dado executivo menos o orçamento do desporto, u .

As quatro variáveis, (t_1, t_2, u, v) , satisfazem (para certa escolha das origens) a misteriosa relação determinada pelo brilhante matemático e economista André Gil Gaudêncio (por ele designada relação elíptica, vá-se lá saber porquê)

$$\begin{cases} t_1^2 - t_2^2 - u^3 + 3uv^2 - 2u + 3 = 0 \\ 2t_1t_2 - 3u^2v + v^3 - 2v = 0 \end{cases} \quad (1)$$

e em 2025 $(t_1, t_2, u, v) = (1, 2, 1, 1)$.

Diga qual foi o valor de $\frac{\partial v}{\partial t_1}$ que Ricardo G encontrou.

(**Sugestão:** Aplique o teorema da função implícita para mostrar que, numa vizinhança do ponto $(1, 2, 1, 1)$, a relação (1) acima define (u, v) como função de (t_1, t_2) e calcule a derivada parcial pedida usando o mesmo teorema.)

Resolução:

De acordo com o teorema da função implícita para que a relação (1) defina, numa vizinhança do ponto $p_0 = (t_{10}, t_{20}, u_0, v_0)$ que satisfaz a (1), (u, v) como função de (t_1, t_2) , é suficiente que

$$J_{(u,v)}F(t_{10}, t_{20}, u_0, v_0) = \det \left(\frac{\partial F}{\partial (u, v)} \right) (t_{10}, t_{20}, u_0, v_0) \neq 0,$$

onde $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a função de classe C^∞ definida por (1), i.e.

$$F_1(t_1, t_2, u, v) = t_1^2 - t_2^2 - u^3 + 3uv^2 - 2u + 3$$

e

$$F_2(t_1, t_2, u, v) = 2t_1t_2 - 3u^2v + v^3 - 2v.$$

Comecemos por verificar que o ponto $p_0 = (1, 2, 1, 1)$ satisfaz a (1)

$$\begin{cases} 1 - 4 - 1 + 3 - 2 + 3 = 0 \\ 4 - 3 + 1 - 2 = 0. \end{cases}$$

¹Nota histórica: Depois de aturadas investigações os historiadores concluíram não haver relação entre a linhagem relativamente modesta de Grandêncios, iniciada com o nosso heroi, e a influente linhagem dos Gaudêncios, devendo ser atribuída a uma daquelas coincidências frequentes em História a permanência para repouso em Ribanceira de Cima de Valdevinos Gaudêncio no longinquo ano de 2001.

Calculemos agora a matriz 2×4 da derivada de F , DF , no ponto em questão,

$$\begin{aligned} DF(1, 2, 1, 1) &= \begin{pmatrix} 2t_1 & -2t_2 & -3u^2 + 3v^2 - 2 & 6uv \\ 2t_2 & 2t_1 & -6uv & -3u^2 + 3v^2 - 2 \end{pmatrix} \Big|_{(1,2,1,1)} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Temos então

$$J_{(u,v)}F(1, 2, 1, 1) = \det \left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)} \right) (1, 2, 1, 1) = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 40 \neq 0 \quad (3)$$

pelo que a relação (1) define, numa vizinhança do ponto $(1, 2, 1, 1)$, (u, v) como função de classe C^∞ de (t_1, t_2) .

Para calcular derivadas parciais em ordem a t_1 das funções definidas implicitamente por (1) derivemos estas relações em ordem a t_1

$$\begin{aligned} 2t_1 - 3u^2 \frac{\partial u}{\partial t_1} + 3 \frac{\partial u}{\partial t_1} v^2 + 6uv \frac{\partial v}{\partial t_1} - 2 \frac{\partial u}{\partial t_1} &= 0 \\ 2t_2 - 6u \frac{\partial u}{\partial t_1} v - 3u^2 \frac{\partial v}{\partial t_1} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial t_1} - 2 \frac{\partial v}{\partial t_1} &= 0, \end{aligned}$$

o que, no ponto $(1, 2, 1, 1)$, dá o sistema

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial u}{\partial t_1}(1, 2) + 6 \frac{\partial v}{\partial t_1}(1, 2) &= -2 \\ -6 \frac{\partial u}{\partial t_1}(1, 2) - 2 \frac{\partial v}{\partial t_1}(1, 2) &= -4 \end{aligned} \quad (4)$$

Como era de esperar (ver aulas teóricas) obtivemos um sistema de equações lineares não homogêneas tendo como matriz precisamente a matriz não singular $\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(1, 2, 1, 1)$ calculada em (2), (3). A solução é

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t_1} \\ \frac{\partial v}{\partial t_1} \end{pmatrix} \Big|_{(1,2)} &= \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

O valor que Ricardo Gaudêncio encontrou foi assim, para sua satisfação e alívio, $\frac{\partial v}{\partial t_1}(1, 2) = -\frac{1}{10}$.