Análise Matemática III
$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2000/2001

Exercício teste 8 (a entregar na aula prática da semana de 13/11 a 17/11)
Calcule

$$\oint_\gamma P dx + Q dy$$

onde

$$(P, Q) = \left(-y + \frac{1 - x^2 + y^2 - 2xy}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}, \cos(x) + \frac{1 + x^2 - y^2 - 2xy}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2} \right)$$

e γ é a fronteira do quadrado

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1 \right\}$$

percorrida uma vez no sentido directo.
Solução: Pelo teorema de Green,

$$\oint_\gamma P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= -\operatorname{sen}(x) + \frac{(2x - 2y)\left(1 + x^2 + y^2\right)^2 - 4x\left(1 + x^2 + y^2\right)\left(1 + x^2 - y^2 - 2xy\right)}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^4}; \\
\frac{\partial P}{\partial y} &= -1 + \frac{(2y - 2x)\left(1 + x^2 + y^2\right)^2 - 4y\left(1 + x^2 + y^2\right)\left(1 - x^2 + y^2 - 2xy\right)}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^4},
\end{aligned}$$

concluimos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= -\operatorname{sen}(x) + 1 + \frac{4(x - y)\left(1 + x^2 + y^2\right) - 4\left(x + x^3 + xy^2 - y - yx^2 - y^3\right)}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^3} \\
&= -\operatorname{sen}(x) + 1
\end{aligned}$$

e que portanto

$$\oint_\gamma P dx + Q dy = \iint_S (-\operatorname{sen}(x) + 1)\, dx dy = 4$$

(já que $\operatorname{sen}(x)$ é ímpar e portanto o seu integral em $[-1, 1]$ é zero).
Note-se que o cálculo deste integral de linha pela definição seria bastante mais complicado.