Análise Matemática III
1º semestre de 2002/2003

Exercício teste 8 (a entregar na aula prática da semana de 11/11/2002)

1. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x\cos yz &= 1 \\ x\sin yz &= 0 \\ x+y &= 2 \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ onde este sistema tem uma solução única.

2. Considere a função $f : A \to \mathbb{R}$, com $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0, 2x \neq y\}$, definida por:

$$f(x, y) = (\ \log xy\ ,\ \frac{1}{2x-y}\ )$$

a) Determine os pontos $(x, y) \in A$ em que f é localmente invertível.

b) Sabendo que $f(1, 1) = (0, 1)$, determine a derivada da função f^{-1} no ponto $(0, 1)$.

Resolução

1. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$F(x, y, z) = (x\cos yz, x\sin yz, x+y)$$

Trata-se de uma função de classe C^1 que verifica $F(1, 1, 0) = (1, 0, 2)$, logo o ponto $(1, 1, 0)$ é uma solução do sistema de equacões. O Teorema da Função Inversa garante que na vizinhança da solução $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ temos uma solução única desde que $\det DF(1, 1, 0) \neq 0$.

De facto, temos

$$\det DF = \det \begin{bmatrix} \cos yz & -xz\sin yz & -xy\sin yz \\ \sin yz & xz\cos yz & xy\cos yz \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -zx^2y\sin yz\cos yz + zx^2y\sin yz\cos yz - xy\cos^2 yz - xy\sin^2 yz = -xy.$$

Logo no ponto $(1,1,0)$ obtemos $\det DF(1,1,0) = -1 \neq 0$ portanto existe uma vizinhaça deste ponto onde F é invertível e podemos concluir o que nos é pedido.

2.a) A função f é de classe C^1 no seu domínio. O Teorema da Função Inversa garante que f tem inversa local em torno do ponto $(x,y) \in A$ desde que o determinante $\det Df(x,y)$ seja não nulo nesse ponto. Temos

$$\det Df(x,y) = \det \begin{bmatrix} \frac{y}{xy} & \frac{x}{xy} \\ \frac{-2}{(2x-y)^2} & \frac{1}{(2x-y)^2} \end{bmatrix} = \frac{y+2x}{xy(2x-y)^2}$$

O determinante anula-se nos pontos (x,y) em que $y = -2x$. Como estes pontos não pertencem ao domínio podemos concluir que f tem inversa local em todos os pontos $(x,y) \in A$.

2.b) Note-se que temos

$$\det Df(1,1) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 3.$$

Sendo f invertível no ponto $(1,1)$ e sabendo que $f(1,1) = (0,1)$ obtemos

$$Df^{-1}(0,1) = [Df(1,1)]^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$