Análise Matemática III
$2^{\underline{o}}$ Semestre de 2000/2001

Exercício teste 8

Considere o campo vectorial

$$f(x,y) = (\frac{-y}{(x+1)^2+y^2} + \frac{3(x-1)}{(x-1)^2+y^2}, \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{3y}{(x-1)^2+y^2} + x).$$

Calcule o trabalho de f ao longo da elipse de equação $x^2/25 + y^2/16 = 1$ percorrida no sentido anti-horário.

Solução:

Vamos decompor o campo f em três partes: $f = h + g + l$ onde

$$h(x,y,z) = (\frac{-y}{(x+1)^2+y^2}, \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2})$$

e

$$g(x,y,z) = (\frac{3(x-1)}{(x-1)^2+y^2}, \frac{3y}{(x-1)^2+y^2}); \;\; l(x,y,z) = (0,x).$$

O campo h é fechado, é singular no ponto $(-1,0)$ (que portanto não pertence ao seu domínio), e não é um gradiente: seja C a circunferência de raio 1 centrada em $(-1,0)$. Facilmente se verifica que o trabalho de h ao longo se C percorrida no sentido anti-horário é 2π, pelo que h não é conservativo.

O campo g é radial com centro no ponto $(1,0)$ que não pertence ao seu domínio. É fechado. Seja C' a circunferência de raio 1 centrada em $(1,0)$. O trabalho de g ao longo de C' é zero porque g é perpendicular a C'. Pelo teorema de Green conclui-se que o integral de g ao longo de qualquer curva regular fechada em $\mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$ é zero, pelo que g é um gradiente nesse conjunto.

Seja E a elipse do enunciado que vamos considerar percorrida no sentido anti-horário.

Aplicando o teorema de Green à região contida entre as curvas C e E, e sendo h fechado, concluímos que $\int_E h = \int_C h = 2\pi$.

Por outro lado, como g é gradiente em $\mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$ temos $\int_E g = 0$.

Só falta agora calcular $\int_E l$. O campo $l = (0,x)$ é de classe C^1 na região A contida no interior da curva E. Logo, pelo teorema de Green temos

$$\int_E l = \int_A (\partial_1 l_2 - \partial_2 l_1) dxdy = \int_A (1) dxdy = (\text{área da elipse}) = 20\pi$$

Obtemos finalmente $\int_E f = \int_E h + \int_E g + \int_E l = 2\pi + 0 + 20\pi = 22\pi$.

Note-se que teria sido extraordinariamnte mais longo, difícil e aborrecido fazer este cálculo directamente através da definição.