Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício teste 8

Considere a variedade

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1;\ z > \sqrt{x^2 + y^2};\ x < 0\}$$

Descreva parametricamente M e determine a respectiva dimensão.

Solução: Trata-se de um pedaço da esfera de raio um e centro na origem de $\mathbb{R}^3$ e que se encontra representado na figura 1. Para descrever M, note-se que $x < 0$ e a intersecção entre o cone

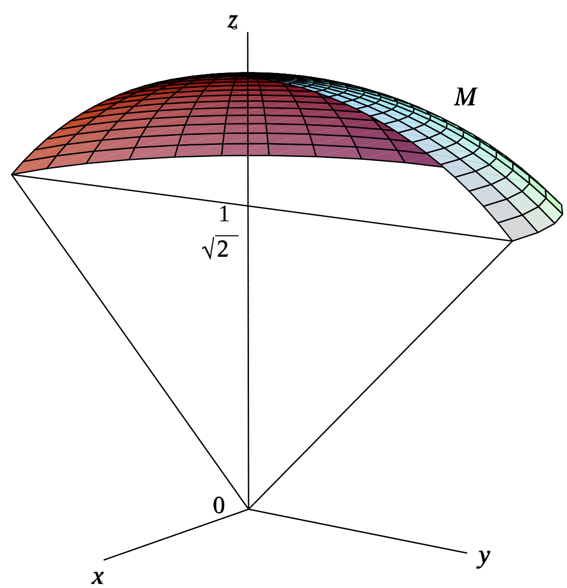

Figura 1: $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1;\ z > \sqrt{x^2 + y^2};\ x < 0\}$

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é uma circunferência situada no plano $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, centrada no ponto $(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e de raio igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Na figura estão representados os segmentos de recta $z = y$ e $z = -y$ resultantes da intersecção do cone com o plano $x = 0$.

Em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) podemos descrever M da forma seguinte

$$r = 1;\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2};\ 0 < \phi < \frac{\pi}{4}$$

e, portanto, considere-se a funcção $g :]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{4}[\to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, \phi) = (\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi)$$

Esta função é de classe C^1, injectiva e a sua derivada

$$Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\phi \end{bmatrix}$$

Tem característica igual a 2 dado que $\operatorname{sen}\phi \neq 0$. Além disso, $M = g(]\frac{\pi}{2}, \pi[\times]0, \frac{\pi}{4}[)$, ou seja, g é uma bijecção entre M e um intervalo aberto de $\mathbb{R}^2$.Portanto, G é uma parametrização de M e $dim(M) = 2$..

Podemos também descrever M em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z):

$$z^2 + \rho^2 = 1; \; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi; \; o < \rho < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e considerar a função $g :]\frac{\pi}{2}, \pi[\times]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, \sqrt{1 - \rho^2})$$

Esta função é também de classe C^1, injectiva e a sua derivada

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \\ -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} & 0 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 2. Além disso, $M = g(]\frac{\pi}{2}, \pi[\times]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[)$ e, portanto, g é uma parametrização de M e $dim(M) = 2$.