# Análise Matemática III
# $2^{\underline{o}}$ semestre de 1999/2000

**Exercício teste 8** (entregar na aula prática da semana de 22/5/00)
Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z)) = (x+y+z, x\cos(y^2+z^2)+z).$$

a) Suponha que queremos resolver as equações $F(x,y,z) = 0$, na vizinhança da solução dada por $(0,0,0)$, em ordem a um par de variáveis. Quais são as escolhas aconselháveis para esse par de variáveis ?

b) Para uma das possibilidades encontradas na alínea a), calcule as derivadas da solução implícita em ordem à variável livre, no ponto correspondente à solução $(0,0,0)$.

**Solução:** A função $F$ é de classe $C^1$. Calculemos a sua matriz Jacobiana:

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(y^2+z^2) & -2xy\mathrm{sen}(y^2+z^2) & -2xz\mathrm{sen}(y^2+z^2)+1 \end{bmatrix}$$

No ponto $(0,0,0)$ temos

$$DF(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O sistema $F = 0$ é de duas equações a três incógnitas. Vamos tentar resovê-lo, na vizinhança da solução $(0,0,0)$, escrevendo duas das variáveis em função da terceira. As colunas de $DF(0,0,0)$ correpondentes a $(x,y)$ são independentes. Logo pelo TFI podemos localmente, pelo menos implicitamente, escrever $x$ e $y$ em função de $z$, *i.e.* obtemos funções de classe $C^1$, $x(z)$ e $y(z)$ definidas numa vizinhança de $z = 0$, que satisfazem o sistema de equações: $F(x(z), y(z), z) = 0$.

O mesmo se aplica para $(y,z)$ que podemos escrever localmente em função de $x$. No entanto, as colunas de $DF(0,0,0)$ correspondentes a $x$ e $z$ não são independentes: seria uma má escolha tentar resolver o sistema na vizinhança de $(0,0,0)$ escrevendo $x$ e $z$ em função de $y$.

b) Vamos calcular as derivadas das funções implícitas $x(z)$ e $y(z)$. Para isso consideramos a função $g$ definida, numa vizinhança de $z = 0$, por $g(z) = (x(z), y(z), z)$. Temos que nessa vizinhança $F \circ g(z) = 0$. Usando a derivada da função composta obtemos:

$$D(F \circ g)(z) = DF(g(z)) \cdot Dg(z) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(y^2+z^2) & -2xy\mathrm{sen}(y^2+z^2) & -2xz\mathrm{sen}(y^2+z^2)+1 \end{bmatrix} (z) \cdot \begin{bmatrix} x'(z) \\ y'(z) \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

No ponto $(0,0,0)$, temos então

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} (z) \cdot \begin{bmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Resolvendo este sistema obtemos finalmente, $x'(0) = -1$ e $y'(0) = 0$.