Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício teste 7 (a entregar na aula prática da semana de 15/5/2000)

Considere o campo vectorial $F:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0),(0,1)\}\to\mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}\,,\,\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+(y-1)^2}\right)$$

Determine o integral de linha do campo F ao longo do caminho que descreve a fronteira do quadrado com vértices nos pontos $(2,2),(-2,2),(-2,-2),(2,-2)$ no sentido directo (contrário ao dos ponteiros de um relógio).

Solução:
Designemos por γ o caminho que descreve a fronteira Γ do quadrado e sejam $g_1:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ e $g_2:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ os caminhos definidos por

$$\begin{aligned} g_1(t) &= (\frac{1}{4}\cos t,\frac{1}{4}\operatorname{sen} t)\\ g_2(t) &= (\frac{1}{4}\cos t,\frac{1}{4}(\operatorname{sen} t+1)) \end{aligned}$$

ou seja, g_1 descreve a circunferência C_1 de raio $1/4$ e centro na origem no sentido positivo e g_2 descreve a circunferência C_2 de raio $1/4$ e centro no ponto $(0,1)$ no sentido positivo.

O campo F pode ser decomposto na soma de dois campos $F=F_1+F_2$ em que

$$\begin{aligned} F_1(x,y) &= \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,,\,\frac{x}{x^2+y^2}\right)\\ F_2(x,y) &= \left(-\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}\,,\,\frac{x}{x^2+(y-1)^2}\right) \end{aligned}$$

Facilmente se verifica que os campos F_1 e F_2 são fechados, ou seja, o campo F é fechado. Portanto, aplicando o teorema de Green à região limitada pelas circunferências C_1 e C_2 e pela fronteira Γ do quadrado, obtemos

$$0=\int_\Gamma F\cdot d\gamma-\int_{C_1}F\cdot dg_1-\int_{C_2}F\cdot dg_2$$

ou seja,

$$\int_\Gamma F\cdot d\gamma=\int_{C_1}(F_1+F_2)\cdot dg_1+\int_{C_2}(F_1+F_2)\cdot dg_2$$

Por outro lado, o círculo limitado pela circunferência C_2 não contém a origem e, portanto temos

$$\int_{C_2}F_1\cdot dg_2=0$$

Do mesmo modo, o círculo limitado pela cicunferência C_1 não contém o ponto $(0,1)$ e, portanto, concluimos que

$$\int_{C_1}F_2\cdot dg_1=0$$

Assim, temos

$$\int_\Gamma F\cdot d\gamma=\int_{C_1}F_1\cdot dg_1+\int_{C_2}F_2\cdot dg_2$$

Da definição de integral de linha de um campo vectorial obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} F_1 \cdot dg_1 &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) dt = 2\pi \\
\int_{C_2} F_2 \cdot dg_2 &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) dt = 2\pi
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Gamma F \cdot d\gamma = 2\pi + 2\pi = 4\pi$$