Análise Matemática III
1º semestre de 2002/2003

Proposta de Resolução do Exercício Teste 7

1. Calcule $\int_C P\,dx + Q\,dy$ onde $P(x,y) = ye^x + 7 - y^2 + 2xy^3$, $Q(x,y) = e^x + \sin y + 3x^2y^2$ e C é o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$ percorrido no sentido directo.

2. Seja R uma região em $\mathbb{R}^2$ com fronteira uma curva regular C. Seja $g(t) = (X(t), Y(t))$, $a \leq t \leq b$, uma parametrização de C. Demonstre a seguinte fórmula para a área:

$$\text{Área } (R) = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\int_a^b \det\begin{bmatrix} X(t) & Y(t) \\ X'(t) & Y'(t) \end{bmatrix} dt\ .$$

Resolução

1. O campo vectorial (P,Q) em $\mathbb{R}^2$ é de classe C^1 e a curva C é seccionalmente regular, fechada e simples. Seja S a região quadrada limitada por C. Pelo teorema de Green,

$$\int_C P\,dx + Q\,dy \;=\; \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\ .$$

Ora,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + 6xy^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = e^x - 2y + 6xy^2\ ,$$

pelo que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2y\ .$$

Assim o integral pedido é

$$\begin{aligned} \textstyle\int_C P\,dx + Q\,dy &= \textstyle\iint_S 2y\,dx\,dy \\ &= 2 \times (\text{coordenada y do centróide de } S) \times (\text{área de } S) \\ &= 2 \times \tfrac{1}{2} \times 1 \\ &= 1\ . \end{aligned}$$

2. Com $P(x,y) = -y$ e $Q(x,y) = x$, tem-se

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2\ .$$

Pelo teorema de Green, obtém-se

$$\frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy \;=\; \frac{1}{2}\iint_R 2\,dx\,dy \;=\; \iint_R 1\,dx\,dy \;=\; \text{Área } (R)\ .$$

Pela definição de integral de linha de um campo escalar,

$$\frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy \;=\; \frac{1}{2}\int_a^b (-Y(t)X'(t) + X(t)Y'(t))\,dt \;=\; \frac{1}{2}\int_a^b \det\begin{bmatrix} X(t) & Y(t) \\ X'(t) & Y'(t) \end{bmatrix} dt\ .$$