Análise Matemática III
2º semestre de 2000/2001

Exercício teste 7

Enunciado:

Considere o campo vectorial $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}^2$ definido por $f(x,y) = (x/(x^2+y^2), y/(x^2+y^2))$.

a) Sabendo que f define uma força conservativa, encontre um potencial ϕ para f.

b) Calcule o trabalho de f ao longo da espiral parametrizada pelo caminho $g(t) = (2t\cos(t), 2t\,\mathrm{sen}(t))$ com $t \in [\pi, 2\pi]$.

c) Calcule o trabalho de f ao longo do quadrado de vértices $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$ percorrido no sentido anti-horário. Será f um gradiente no seu domínio ?

Solução:

a) O potencial ϕ satisfaz a condição $\nabla\phi = f$, ou seja vamos ter $\frac{\partial\phi}{\partial x} = x/(x^2+y^2)$, $\frac{\partial\phi}{\partial y} = y/(x^2+y^2)$. Integrando a primeira equação, obtem-se $\phi(x,y) = (1/2)ln(x^2+y^2) + g(y)$ onde $g(y)$ é arbitrária. Substituindo na segunda equação obtemos $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, pelo que g é uma constante que podemos tomar como sendo zero. (Recorde-se que o potencial ϕ está definido a menos de uma constante.)

Concluímos que podemos tomar $\phi(x,y) = (1/2)ln(x^2+y^2)$.

Nota: Em geral é preciso cuidado quando se tenta calcular o potencial deste modo. Quando não sabemos à partida se o campo vectorial f é conservativo, é muito importante verificar se o potencial ϕ obtido está bem definido e é de classe C^1 na região em que está definido o problema. Só nesse caso temos a garantia que f é conservativa.

Também é possível encontrar ϕ recorrendo ao teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, que diz que sendo f conservativa e escolhendo-se um ponto base p_0, se tem

$$\phi(p) = \int_{p_0}^{p} f,$$

onde o integral é ao longo de um caminho diferenciável qualquer que ligue p_0 a p. No nosso caso podemos escolher esse caminho da seguinte forma: Tomamos por exemplo, $p_0 = (1,0)$ e ligamos o ponto p a p_0 seguindo primeiro um segmento de recta radial até à circunferência de raio 1 centrada na origem. Depois seguimos um arco dessa circunferência até p_0. O trabalho de f ao longo da segunda parte da trajectória é nulo porque f, sendo radial, é perpendicular às circunferências centradas na origem. Basta então tomar o caminho $g(t) = (tx, ty)$ onde $t \in [1, 1/\sqrt{x^2+y^2}]$ que liga o ponto (x,y) à circunferência de raio 1 centrada na origem. Temos então

$$\phi(x,y) = \int_1^{1/\sqrt{x^2+y^2}} (tx/((tx)^2+(ty)^2), ty/((tx)^2+(ty)^2))\cdot(x,y)dt = \int_1^{1/\sqrt{x^2+y^2}} 1/tdt = (1/2)ln(x^2+y^2),$$

que concorda com o que obtivemos acima.

b) Para calcular o trabalho de f ao longo da espiral vamos utilizar o teorema fundamental do cálculo,

$$W = \int f dg = \int \nabla\phi\, dg = \phi(g(2\pi)) - \phi(g(\pi)) = \phi(4\pi, 0) - \phi(-2\pi, 0) = (1/2)(ln(16\pi^2) - ln(4\pi^2)) = ln(2).$$

Note-se que seria muito mais difícil fazer este cálculo directamente utilizando a definição de trabalho.

c) O trabalho de f ao longo do quadrado é zero porque $f = \nabla\phi$ e o quadrado é uma curva fechada. Evidentemente que f é um gradiante, pois como vimos temos $f = \nabla\phi$ com ϕ bem definida em todo o domínio de f.