Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício teste 7

Mostre que existe uma vizinhança do ponto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ em que o sistema

$$\begin{cases} xu + yvu^2 & = & 2 \\ xu^3 + y^2v^4 & = & 2 \end{cases}$$

pode ser resolvido para u e v como funções de x e y. Calcule a derivada $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1)$.

Solução: Consideremos a função $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y, u, v) = (xu + yvu^2 - 2, xu^3 + y^2v^4 - 2) = (F_1, F_2)$. Trata-se de uma função de classe C^1. Calculemos o determinante

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x + 2yuv & yu^2 \\ 3u^2x & 4y^2v^3 \end{bmatrix}$$

No ponto $(1, 1, 1, 1)$ temos

$$J = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 9$$

Sendo $J \neq 0$ no ponto $(1, 1, 1, 1)$, pelo teorema da função implícita, em alguma vizinhança de $(1, 1, 1, 1)$, o sistema pode ser resolvido em ordem a u e v como funções de x e y e de classe C^1.

Para calcular $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1)$, use-se a derivada da função composta em x para obter:

$$\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x} + u + y\frac{\partial v}{\partial x}u^2 + 2yuv\frac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \\ 3xu^2\frac{\partial u}{\partial x} + u^3 + 4y^2v^3\frac{\partial v}{\partial x} & = & 0 \end{cases}$$

No ponto $(1, 1, 1, 1)$, temos

$$\begin{cases} 3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} & = & -1 \\ 3\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial v}{\partial x} & = & -1 \end{cases}$$

e resolvendo este sistema obtemos $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{3}$.