Análise Matemática III
$1^{\underline{o}}$ semestre de 1999/2000

Exercício teste 6

Um avião a hélice desloca-se em linha recta a uma velocidade constante igual a 1. Se a hélice do avião tem raio r e roda a velocidade constante, ω vezes por unidade de tempo, qual é o comprimento da trajectória descrita por um extremo da hélice quando o avião se desloca L unidades de comprimento?

Solução: Podemos colocar o avião a deslocar-se ao longo do eixo Ox e de tal forma que no instante inicial o centro da hélice se encontra na origem. Então uma parametrização da trajectória percorrida pelo centro da hélice é dada pelo caminho $g_1 : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por

$$g_1(t) = (t, 0, 0)$$

Por outro lado, a hélice roda a uma velocidade constante em relação ao centro, num plano perpendicular ao eixo Ox. Assim, uma parametrização da trajectória do extremo da hélice *em relação ao centro* é dada pelo caminho $g_2 : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por

$$g_2(t) = (0, r\cos(2\pi\omega t), r\,\mathrm{sen}(2\pi\omega t))$$

A trajectória do extremo da hélice é descrita pela soma dos dois caminhos em $\mathbb{R}^3$. Isto é, por $g : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por

$$g(t) = (t, r\cos(2\pi\omega t), r\,\mathrm{sen}(2\pi\omega t))$$

O comprimento deste caminho é dado pela expressão (onde $C = g([0, L])$)

$$\int_C 1 = \int_0^L ||g'(t)||dt$$

Como

$$g'(t) = (1, -2\pi\omega r\,\mathrm{sen}(2\pi\omega t), 2\pi\omega r\cos(2\pi\omega t))$$

temos

$$\begin{aligned} ||g'(t)|| &= \sqrt{1 + 4\pi^2 r^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2(2\pi\omega t) + 4\pi^2 r^2\omega^2\cos^2(2\pi\omega t)} \\ &= \sqrt{1 + 4\pi^2 r^2\omega^2} \end{aligned}$$

e portanto

$$\int_C 1 = L\sqrt{1 + 4\pi^2 r^2\omega^2}$$