Análise Matemática III
1º semestre de 2001/02

Exercício Teste 6

A menina Lucialima tem um esquilo de que gosta muito e que trata ternurentamente por "tiquinho Gaudêncio". Uma das brincadeiras favoritas deste nosso par de heróis, sobretudo em dias de chuva como este, é a de fazer uma corrida em que a menina Lucialima corre pela escada abaixo enquanto o "tiquinho" escorrega pelo corrimão abanando a cauda.

O corrimão (fino) da escada tem a forma da curva

$$C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \ z = \frac{\sqrt{5}}{2} y, \ 0 \le y \le 2, x \ge 0 \right\}$$

a) Determine a massa do corrimão sabendo que a densidade de massa por unidade de comprimento é $\sigma(x,y,z) = x + y$.

b) Determine o centro de massa $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ do corrimão.

c) O Sr. Gaudêncio adora engenhocas e montou as escadas numa plataforma giratória que roda em torno do eixo $L = Oz$. É por isso importante conhecer o momento de inércia, I_L, do corrimão em relação a esse eixo. Determine I_L.

Resolução:

a) Uma parametrização do corrimão é dada por,

$$g \ : \ \begin{cases} x = & 3 \cos(\theta) \\ y = & 2 \ \mathrm{sen}(\theta) \\ z = & \sqrt{5} \ \mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

pelo que

$$g\prime(\theta) = (-3 \ \mathrm{sen}(\theta), 2 \ \cos(\theta), \sqrt{5} \ \cos(\theta))$$

e

$$||g\prime(\theta)|| = \sqrt{9\mathrm{sen}^2(\theta) + 4\cos^2(\theta) + 5\cos^2(\theta)} = 3 \ .$$

A massa é então,

$$\begin{aligned} M = \int_C \sigma \ &= \ \int_0^{\pi/2} (3\cos(\theta) + 2\mathrm{sen}(\theta))\, 3d\theta = \\ &= \ (9\mathrm{sen}(\theta) - 6\cos(\theta))_0^{\pi/2} = 15 \end{aligned}$$

b) O centro de massa tem coordenadas dadas por

$$\begin{aligned} \overline{x} = \frac{1}{M} \int_C x\sigma \ &= \ \frac{1}{15} \int_0^{\pi/2} 3\cos(\theta)\, (3\cos(\theta) + 2\mathrm{sen}(\theta))\, 3d\theta = \\ &= \ \frac{9}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta + \frac{6}{5} \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) d\theta = \frac{9\pi}{20} + \frac{3}{5} \cong 2.01 \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{M}\int_C y\sigma = \frac{1}{15}\int_0^{\pi/2} 2\mathrm{sen}(\theta)\left(3\cos(\theta)+2\mathrm{sen}(\theta)\right)3d\theta = \frac{3}{5}+\frac{\pi}{5} \cong 1.23,\\
\overline{z} &= \frac{1}{M}\int_C z\sigma = \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{y} = \sqrt{5}\frac{\pi+3}{10} \cong 1.37
\end{aligned}$$

c) Para o momento de inércia em relação ao eixo Oz temos

$$\begin{aligned}
I_L = \int_C d^2\sigma &= \int_0^{\pi/2}\left(9\cos^2(\theta)+4\mathrm{sen}^2(\theta)\right)\left(3\cos(\theta)+2\mathrm{sen}(\theta)\right)3d\theta\\
&= 3\int_0^{\pi/2}\left(5\cos^2(\theta)+4\right)2\mathrm{sen}(\theta)d\theta + 3\int_0^{\pi/2}\left(9-5\mathrm{sen}^2(\theta)\right)3\cos(\theta)d\theta =\\
&= 6\int_0^1 (5u^2+4)du + 9\int_0^1 (9-5v^2)dv = 100.
\end{aligned}$$