Análise Matemática III
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2000/2001

Exercício Teste 6

Considere a curva $C \subset V \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo caminho $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definido por $g(\theta) = (3\theta \cos(\theta), 3\theta \operatorname{sen}(\theta), 2\sqrt{2}\,\theta^{3/2})$.

a) Calcule o comprimento do caminho g.

b) Seja a densidade de massa de C dada por $\alpha(x, y, z) = \alpha$, constante. Calcule o momento de inércia de C em relação ao eixo dos z.

c) Considere que C está mergulhada num campo eléctrico dado pela expressão $f(x, y, z) = (y, -x, z)$. Se C fôr a trajéctoria de uma partícula pontual de carga eléctrica unitária, calcule o trabalho exercido pela força eléctrica durante essa trajéctoria.

Solução:

a) Temos $g'(\theta) = (-3\theta \operatorname{sen}(\theta) + 3\cos(\theta), 3\operatorname{sen}(\theta) + 3\theta\cos(\theta), 3\sqrt{2}\sqrt{\theta})$, logo $||g'(\theta)|| = 3(1+\theta)$. O comprimento é então dado por

$$L_g = \int_0^{2\pi} 3(1+\theta)d\theta = 6\pi(1+\pi).$$

b) A distância do ponto (x, y, z) ao eixo dos z é dada por $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Logo, $d(g(\theta))^2 = x(\theta)^2 + y(\theta)^2 = 9\theta^2$ e portanto o momento de inércia pedido vai ser

$$I = \int_0^{2\pi} \alpha 9\theta^2 ||g'(\theta)|| d\theta = 27\alpha \int_0^{2\pi} \theta^2(1+\theta)d\theta = 27\alpha\pi^3(8/3 + 4\pi).$$

Esta grandeza mede a maior ou menor potência que é necessária para colocar C a rodar à volta do eixo com uma determinada velocidade angular.

c) Temos $f(g(\theta)) = (3\theta \operatorname{sen}(\theta), -3\theta\cos(\theta), 2\sqrt{2}\,\theta^{3/2})$. Logo, $f(g(\theta)) \cdot g'(\theta) = 3\theta^2$ e o trabalho é

$$W = \int_0^{2\pi} f(g(\theta)) \cdot g'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} 3\theta^2 d\theta = 8\pi^3.$$