Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício teste 6 (a entregar na aula prática da semana de 01/5/2000)

Considere o subconjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 2\,;\; x^2 < y < x^2 + 1\}$$

e a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x, y) = (x, y - x^2)$$

i) Mostre que g é uma transformação de coordenadas.

ii) Calcule o integral $\int_S x^2 dxdy$ usando a transformação de coordenadas g.

Solução:

i) – A função g é claramente de classe C^1.

– A função g é injectiva. De facto, se $g(x_1, y_1) = g(x_2, y_2)$ então

$$(x_1, y_1 - x_1^2) = (x_2, y_2 - x_2^2)$$

e, portanto,

$$x_1 = x_2\,;\; y_1 = y_2$$

– A derivada de g é dada pela matriz

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2x & 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto

$$\det Dg(x, y) = 1 \neq 0$$

Assim, g é uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^2$.

ii) Da descrição do conjunto S temos

$$-1 < x < 2\,;\; 0 < y - x^2 < 1$$

e fazendo $(u, v) = g(x, y)$, obtemos

$$-1 < u < 2\,;\; 0 < v < 1$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_S x^2 dxdy &= \int_{-1}^{2} \left(\int_0^1 u^2 dv \right) du \\ &= \int_{-1}^{2} u^2 du \\ &= \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$