Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício teste 5 (entregar na aula prática da semana de 23/10/2000)
Determine o volume do conjunto S dado por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\,;\, y > 0\,;\, 0 < z < \sqrt{x^2+y^2}\,;\, x^2+y^2+z^2 < 1\}$$

usando uma mudança de coordenadas apropriada.
Solução:

1. **Coordenadas esféricas**:
   Nas coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), das inequações $x > 0\,;\, y > 0$ obtemos
   $$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$
   e das inequações $0 < z < \sqrt{x^2+y^2}$ temos
   $$\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{2}$$
   Da inequação $x^2+y^2+z^2 < 1$ concluimos que
   $$0 < r < 1$$
   Portanto, em S temos
   $$\begin{array}{c} 0 < r < 1 \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{2} \end{array}$$
   ou seja, em coordenadas esféricas temos um intervalo. Do teorema da mudança de variáveis, obtemos
   $$\begin{aligned} vol(S) &= \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \mathrm{sen}\phi d\theta \right) d\phi \right) dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \mathrm{sen}\phi d\phi \right) dr \\ &= \frac{\pi}{6} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

2. **Coordenadas cilíndricas**:
   Consideremos as coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) em que $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.
   Dado que $x > 0\,;\, y > 0$, então
   $$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$
   Das inequações $0 < z < \sqrt{x^2+y^2}$, obtemos
   $$0 < z < \rho$$

e da inequação $x^2+y^2+z^2<1$, temos

$$\rho^2+z^2<1$$

ou seja

$$\rho<\sqrt{1-z^2}$$

As superfícies $z=0$ (plano) e $\rho^2+z^2=1$ (esfera) intersectam-se em $\rho=1$.

As superfícies $z=\rho$ (cone) e $\rho^2+z^2=1$ (esfera) intersectam-se segundo $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$

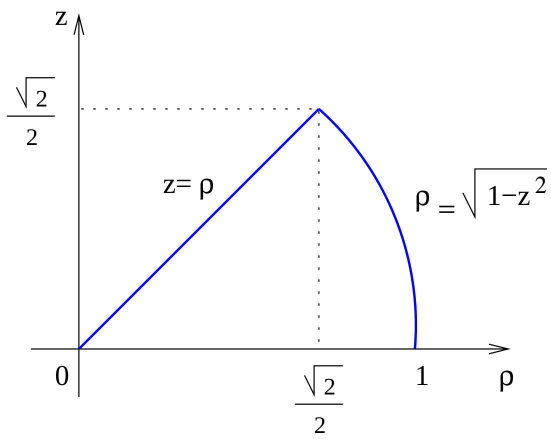

Figura 1: Corte em S segundo θ constante.

Portanto, em S temos

$$\begin{array}{c} 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ 0<z<\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z<\rho<\sqrt{1-z^2} \end{array}$$

Na figura 1 está representado o corte em S segundo θ constante. Do teorema da mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned} vol(S) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\int_z^{\sqrt{1-z^2}}\rho d\rho\right)dz\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-2z^2)dz\right)d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2^{3/2}}{12}\right) \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$