Análise Matemática III
2º semestre de 2000/2001

Exercício Teste 5

Considere a região $V \subset \mathbb{R}^3$ do primeiro exercício-teste:

$$\begin{aligned} V \;=\; & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \\ & 0 \le z \le 4 - 2(x^2+y^2), \text{ se } 0 \le x^2+y^2 \le 1;\ 0 \le z \le 3 - (x^2+y^2), \text{ se } 1 < x^2+y^2 \le 3\}. \end{aligned}$$

a) Calcule o volume de V usando coordenadas cilíndricas.

b) Seja a densidade de massa de V dada por $\alpha(x,y,z) = \alpha$, constante. Calcule o momento de inércia da parte de V com $x^2 + y^2 > 1$ em relação ao eixo definido por $z = 2$ e $x = 0$.

Solução:

a) De acordo com os exercícios-teste 1 e 4 podemos concluir que em coordenadas cilíndricas

$$Vol(V) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{4-2\rho^2} \rho dz \right) d\rho + \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{3-\rho^2} \rho dz \right) d\rho \right) d\theta =$$

$$= 2\pi \left(\int_0^1 \rho(4-2\rho^2) d\rho + \int_1^{\sqrt{3}} \rho(3-\rho^2) d\rho \right) = 5/2.$$

b) A distância do ponto (x,y,z) ao eixo $z = 2, x = 0$ é dada por $d(x,y,z) = \sqrt{x^2 + (z-2)^2} = \sqrt{\rho^2 \cos(\theta)^2 + (z-2)^2}$. Logo o momento de inércia pedido vai ser

$$I = \int_{V \bigcap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 > 1\}} \alpha d^2(x,y,z) dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{3-\rho^2} \rho\alpha(\rho^2 \cos(\theta)^2 + (z-2)^2) dz \right) d\rho \right) d\theta =$$

$$= \alpha \left(\int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 d\theta \right) \int_1^{\sqrt{3}} \rho^3 (3-\rho^2) d\rho + (2/3)\pi\alpha \int_1^{\sqrt{3}} \rho((1-\rho^2)^3 + 8) d\rho =$$

$$= \alpha\pi((3/4)\rho^4 - \rho^6/6)|_1^{\sqrt{3}} + (8/3)\pi\alpha\rho^2|_1^{\sqrt{3}} - (1/12)\pi\alpha(1-\rho^2)^4|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= (34/6)\pi\alpha.$$

Esta grandeza mede a maior ou menor potência que é necessária para colocar o sólido a rodar à volta do eixo com uma determinada velocidade angular.