Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício teste 5

Calcule as coordenadas do centróide do sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, y \geq 0\}$$

usando uma mudança de coordenadas apropriada.

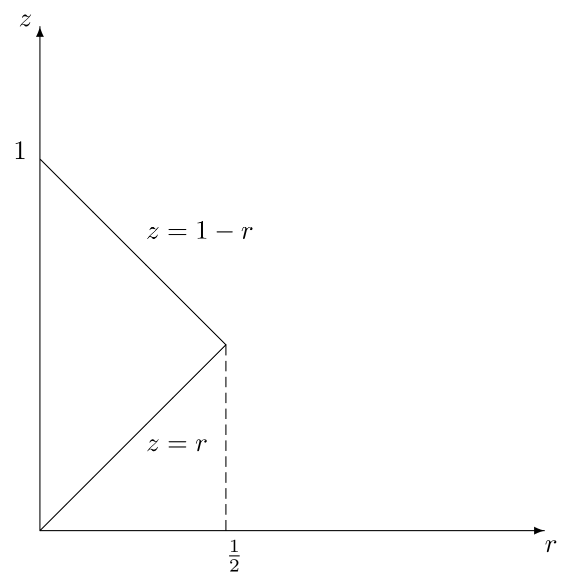
Solução: O sólido tem simetria cilíndrica em torno do eixo Oz por isso, convém considerar coordenadas cilíndricas em torno deste eixo:

$$\begin{cases} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\operatorname{sen}\theta \\ z & = & z \end{cases}$$

Nestas coordenadas as equações que definem o sólido escrevem-se:

$$\begin{cases} r \leq z \leq 1 - r \\ r\operatorname{sen}\theta \geq 0 \end{cases}$$

A segunda condição traduz-se simplesmente em $0 \leq \theta \leq \pi$. Portanto o sólido V trata-se da seguinte figura rodada em torno do eixo Oz sobre a metade do plano xOy em que $y \geq 0$.



Assim, temos a seguinte expressão para o volume de V:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V) &= \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_r^{1-r} r dz dr d\theta \\
&= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} r(1-r-r)dr \\
&= \frac{\pi}{24}
\end{aligned}
$$

Por simetria, temos

$$\overline{x} = 0$$

$$\overline{z} = \frac{1}{2}$$

Quanto à restante coordenada:

$$
\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{\int_V y}{\mathrm{Vol}(V)} \\
&= \frac{24}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_r^{1-r} r^2 \operatorname{sen}\theta dz dr d\theta \\
&= \frac{24}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} r^2(1-r-r)dr \\
&= \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}
$$