Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício teste 5 (entregar na aula prática da semana de 23/10/2000)
Determine o volume do conjunto S dado por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\,;\, y > 0\,;\, 0 < z < \sqrt{x^2 + y^2}\,;\, x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

usando uma mudança de coordenadas apropriada.
Solução:

1. **Coordenadas esféricas**:

   Nas coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), das inequações $x > 0\,;\, y > 0$ obtemos

   $$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

   e das inequações $0 < z < \sqrt{x^2 + y^2}$ temos

   $$\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{2}$$

   Da inequação $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ concluimos que

   $$0 < r < 1$$

   Portanto, em S temos

   $$\begin{array}{c} 0 < r < 1 \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{2} \end{array}$$

   ou seja, em coordenadas esféricas temos um intervalo. Do teorema da mudança de variáveis, obtemos

   $$\begin{aligned} vol(S) &= \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \operatorname{sen}\phi d\theta \right) d\phi \right) dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \operatorname{sen}\phi d\phi \right) dr \\ &= \frac{\pi}{6} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

2. **Coordenadas cilíndricas**:

   Consideremos as coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) em que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   Dado que $x > 0\,;\, y > 0$, então

   $$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

   Das inequações $0 < z < \sqrt{x^2 + y^2}$, obtemos

   $$0 < z < \rho$$

e da inequação $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, temos

$$\rho^2 + z^2 < 1$$

ou seja

$$\rho < \sqrt{1 - z^2}$$

As superfícies $z = 0$ (plano) e $\rho^2 + z^2 = 1$ (esfera) intersectam-se em $\rho = 1$.

As superfícies $z = \rho$ (cone) e $\rho^2 + z^2 = 1$ (esfera) intersectam-se segundo $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$

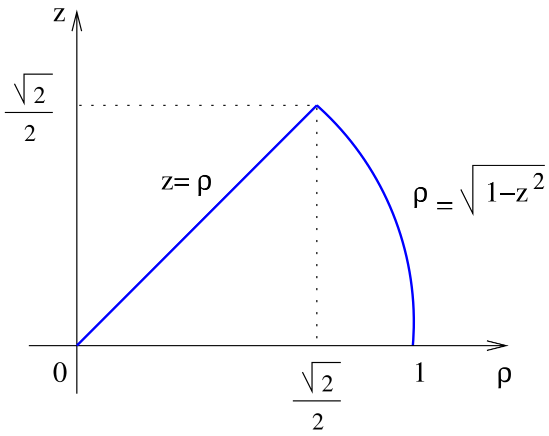

Figura 1: Corte em S segundo θ constante.

Portanto, em S temos

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$z < \rho < \sqrt{1 - z^2}$$

Na figura 1 está representado o corte em S segundo θ constante. Do teorema da mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}
vol(S) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_z^{\sqrt{1-z^2}} \rho d\rho \right) dz \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2z^2) dz \right) d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2^{3/2}}{12} \right) \\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{12}
\end{aligned}$$