Análise Matemática III
$1^{\underline{o}}$ semestre de 2001/02

Exercício teste 5 (Entregar na aula prática da semana de 22/10/01)

A menina Lucialima Gaudêncio, filha do Sr. Gaudêncio agricultor e futura avó do Comodoro Gaudêncio IV, é muito delicada e sensível e adora passear-se no jardim do pai, de vestido rendado e laçarote no cabelo, cantarolando, pensando em problemas de AMIII e apanhando flores que guarda num cesto.

O cesto da menina Lucialima ocupa um delicado volume em $\mathbb{R}^3$ que em unidades apropriadas é descrito por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4, z \leq 0\}.$$

Após tê-los resolvido com alegria, a menina Lucialima sugeriu-nos os seguintes problemas para o exercício-teste 5:

a) Utilizando coordenadas cilíndricas calcule o volume do cesto.

b) Calcule de novo o volume de S mas desta vez utilize primeiro uma mudança de coordenadas linear, combinando-a depois com coordenadas esféricas.

c) Sabendo que a densidade de massa do cesto é dada por $\rho(x, y, z) = (1 + (x^2 + y^2 + 2z^2)^{3/2})$, calcule o seu momento de inércia em relação ao eixo dos z. (Este cálculo é relevante para estudar o movimento de rotação do cesto que a menina Lucialima gosta de fazer quando se sente bem e lhe apetece rodopiar pelo jardim.)

Resolução:

a) O cesto tem simetria cilíndrica, com o eixo de simetria sendo o eixo dos z. Por esta razão, examinamos a forma de S cortando-o por um plano vertical, por exemplo o plano $x = 0$. Nesse plano obtemos $1 \leq y^2 + 2z^2 \leq 4$ com $z \leq 0$, ou seja temos a região com $z \leq 0$ que se encontra entre as duas elipses de equações $y^2 + 2z^2 = 1$ e $y^2 + 2z^2 = 4$. Obervamos então que quando a coordenada ρ (que neste plano é dada por $\rho = |y|$), varia entre 0 e 1 então $-\sqrt{\frac{4-\rho^2}{2}} \leq z \leq -\sqrt{\frac{1-\rho^2}{2}}$. Por outro lado, para $1 \leq \rho \leq 2$ temos $-\sqrt{\frac{4-\rho^2}{2}} \leq z \leq 0$. Quanto a θ temos $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Portanto, o volume de S é dado por

$$V(S) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{\frac{4-\rho^2}{2}}}^{-\sqrt{\frac{1-\rho^2}{2}}} \rho dz \right) d\rho + \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{\frac{4-\rho^2}{2}}}^{0} \rho dz \right) d\rho \right) d\theta.$$

Calculando o integral obtemos,

$$V(S) = 2\pi \left(\int_0^1 (-\sqrt{\frac{1-\rho^2}{2}} + \sqrt{\frac{4-\rho^2}{2}})\rho d\rho + \int_1^2 \sqrt{\frac{4-\rho^2}{2}})\rho d\rho \right) =$$

$$= 2\pi \left(\int_0^{1/2} \sqrt{u} du - \int_0^2 \sqrt{u} du \right) = 4\pi/3(\sqrt{8} - 1/\sqrt{8}).$$

b) O cesto é limitado por porções de superfícies elipsóidais. Um elipsóide é simplesmente uma superfície esférica deformada por alguma alteração de escala nos eixos coordenados. Neste caso podemos definir $w = \sqrt{2}z$ e as condições que definem S em termos de (x, y, w) passam a ser $1 \leq x^2 + y^2 + w^2 \leq 4$ e $w \leq 0$ i.e. em termos de (x, y, w) temos uma região limitada pelos hemisférios Sul de duas superfícies esféricas de raios 1 e 2.

O Jacobiano da transformação $(x, y, z) \to (x, y, w)$ é dado pelo determinante da matriz diagonal com entradas $(1, 1, 1/\sqrt{2})$ que é igual a $1/\sqrt{2}$.

Seja $A = \{(x, y, w)\mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + w^2 \leq 4, w \leq 0\}$.

Temos então, lembrando-nos que a condição $w \leq 0$ diz que $\pi/2 \leq \phi \leq \pi$, e utilizando coordenadas esféricas para (x, y, w),

$$V(S) = \int_S 1 dxdydz = \int_A (1/\sqrt{2}) dxdydw = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_1^2 (1/\sqrt{2}) r^2 \text{sen}(\phi) dr \right) d\phi \right) d\theta =$$

$$= 2\pi(8-1)/(3\sqrt{2}) = 4\pi/3(\sqrt{8} - 1/\sqrt{8}),$$

que é igual ao resultado anterior.

c) Em termos das coordenadas da alínea anterior temos $\rho = (1 + r^3)$, uma vez que $r^2 = x^2 + y^2 + w^2 = x^2 + y^2 + 2z^2$. É portanto conveniente utilizar as expressões da alínea b). O quadrado da distância ao eixo dos z é dada por $d(x, y, z)^2 = x^2 + y^2 = r^2 \text{sen}(\phi)^2$. Assim temos

$$I_z = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_1^2 (1/\sqrt{2})(1 + r^3)(r^2 \text{sen}(\phi)^2) r^2 \text{sen}(\phi) dr \right) d\phi \right) d\theta =$$

$$= 2\pi \left(\int_1^2 (1 + r^3) r^4 dr \right) \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \text{sen}(\phi)^3 d\phi \right) = 2\pi(31/5 + 255/8)(2/3).$$