Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício Teste 5 (a entregar na aula prática da semana de 17/4/2000)
Calcule o momento de inércia, relativamente ao eixo dos z do sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1+\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1-\sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\},$$

sabendo que a densidade de massa é dada por $\alpha(x, y, z) = x^2$, usando uma mudança de coordenadas apropriada.
Solução: O sólido tem simetria cilíndrica em torno do eixo dos z por isso, convém considerar coordenadas cilíndricas em torno deste eixo:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= z \end{cases}$$

O sólido é constituído pela parte com y positivo de dois cones, unidos pela base ao longo do círculo de raio 1 no plano xy. O cone superior tem equação $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ e o cone inferior tem equação $z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}$. A coordenada z varia portanto entre -1 e 1, já que temos a condição $0 \leq x^2+y^2 \leq 1$.

Nestas coordenadas a equação que define o sólido escreve-se: $1 - \rho \leq z \leq -1 + \rho$, com $0 \leq \rho \leq 1$.

Para calcular o momento de inércia relativamente ao eixo dos z, precisamos primeiro de saber qual a distância $d(x, y, z)$ de um ponto (x, y, z) ao eixo dos z. Temos que $d(x, y, z) = ||(x, y, 0)|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$.
Assim, temos a seguinte expressão para o momento de inércia de V:

$$L_z(V) = \int_V \alpha(x, y, z)d^2(x, y, z)dxdydz = \int_0^\pi (\int_0^1 (\int_{-1+\rho}^{1-\rho} \rho^2(\cos\theta)^2\rho^2\rho dz)d\rho)d\theta.$$

O factor $\rho^2(\cos\theta)^2\rho^2$ corresponde a $\alpha(x, y, z)d^2(x, y, z)$. O factor adicional ρ é o Jacobiano das coordenadas cilíndricas. Como $y \geq 0$ temos $o \leq \theta \leq \pi$. Escolhendo a ordem de integração $\int(\int(\int \rho dz)d\rho)d\theta$, obtemos os extremos de integração acima porque para um ρ fixo sabemos que $-1 + \rho \leq z \leq 1 - \rho$.

Calculando o integral obtemos,

$$L_z(V) = (\int_0^\pi (\cos\theta)^2 d\theta)(\int_0^1 (2 - 2\rho)\rho^5 d\rho) = \pi(1/6 - 1/7).$$