Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício teste 4 (a entregar na aula prática da semana de 10/4/2000)

Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ limitado pelos planos coordenados e pelos planos dados pelas equações $x+y+z=3$ e $x+y-z=1$.

Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma:

i) $\int \left(\int \left(\int dz\right) dy\right) dx$

ii) $\int \left(\int \left(\int dx\right) dy\right) dz$

Solução: Em primeiro lugar devemos descrever detalhadamente o conjunto S, em particular a sua fronteira. A fronteira de S é dada pelos planos

$$x=0\ ;\ y=0\ ;\ z=0\ ;\ x+y+z=3\ ;\ x+y-z=1$$

Os planos $x+y+z=3$ e $x+y-z=1$ intersectam-se segundo a linha recta $x+y=2\ ;\ z=1$.
Os planos $x+y-z=1$ e $z=0$ intersectam-se segundo a linha recta $x+y=1\ ;\ z=0$.
Portanto, $S \subset I$ em que $I=[0,2]\times[0,2]\times[0,3]$.

i) Para o integral da forma $\int \left(\int \left(\int dz\right) dy\right) dx$ fixamos $x=a$, ou seja, consideramos a intersecção de S com o plano $x=a$ em que $0<a<2$.

Fixando $x=a$ obtemos o corte em S descrito pelas linhas

$$x=a\ ;\ y=0\ ;\ z=0\ ;\ y+z=3-a\ ;\ y-z=1-a$$

Dado que $0<a<2$ da equação $y-z=1-a$ devemos considerar dois casos: ou $0<x=a<1$ ou $1<x=a<2$, tal como se representa na figura 1.

Para $0<x=a<1$ o corte em S é o quadrilátero

$$y=0\ ;\ z=0\ ;\ y+z=3-a\ ;\ y-z=1-a$$

e note-se que para $z=0$ obtemos $y=1-a>0$.

Para $1<x=a<2$ o corte em S é o triângulo

$$y=0\ ;\ y+z=3-a\ ;\ z-y=a-1$$

Portanto, o volume de S é dado por

$$\begin{aligned}
vol(S) &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{3-x-y} dz\right) dy\right) dx + \\
&+ \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{2-x} \left(\int_{x+y-1}^{3-x-y} dz\right) dy\right) dx + \\
&+ \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} \left(\int_{x+y-1}^{3-x-y} dz\right) dy\right) dx
\end{aligned}$$

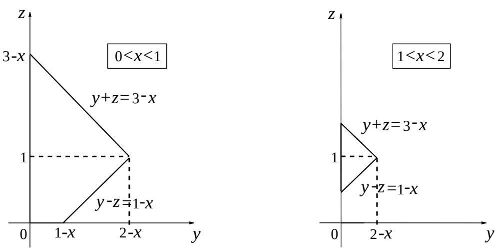

Figura 1: Corte em S segundo o plano $x = a$

ii) Para o integral da forma $\int\left(\int\left(\int dx\right) dy\right) dz$ fixamos $0 < z = c < 3$.

Dado que os planos $x + y + z = 3$ e $x + y - z = 1$ se intersectam para $z = 1$ devemos considerar dois casos ou $0 < z = c < 1$ ou $1 < z = c < 3$, tal como se representa na figura 2.

Para $0 < z = c < 1$ o corte em S ́limitado por três segmentos de recta

$$x = 0\ ;\ y = 0\ ;\ x + y = 1 + c$$

Para $1 < z = c < 3$ o corte em S ́limitado também por três segmentos de recta

$$x = 0\ ;\ y = 0\ ;\ x + y = 3 - c$$

Portanto, o volume de S é dado por

$$\begin{aligned} vol(S) &= \int_0^1 \left(\int_0^{1+z} \left(\int_0^{1+z-y} dz\right) dy\right) dx + \\ &+ \int_1^3 \left(\int_0^{3-z} \left(\int_0^{3-y-z} dz\right) dy\right) dx \end{aligned}$$

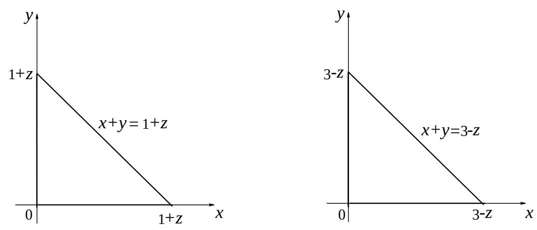

Figura 2: Corte em S segundo o plano $z = c$