Análise Matemática III
2º semestre de 2000/2001

Exercício Teste 4

Considere a região $A \subset \mathbb{R}^3$ obtida a partir da intersecção do primeiro octante com a região do primeiro exercício-teste:

$$\begin{aligned} A \;=\; & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0;\; y \geq 0; \\ & 0 \leq z \leq 4 - 2(x^2+y^2), \text{ se } 0 \leq x^2+y^2 \leq 1;\; 0 \leq z \leq 3-(x^2+y^2), \text{ se } 1 < x^2+y^2 \leq 3\}. \end{aligned}$$

a) Escreva uma expressão para o volume de A na forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

b) Escreva uma expressão para o volume de A na forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$.

c) Calcule $\int_A f$ onde f é definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} y\sqrt{3-z-y^2}, & \text{se } 0 \leq z \leq 2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Solução:

a) Como A é um sólido de revolução, tendo simetria cilíndrica com o eixo de simetria sendo o dos z, os cortes com $z =$ constante vão ser círculos ou coroas circulares.

Para $2 \leq z = z_0 \leq 4$, vamos ter o corte $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_0,\, x^2+y^2 \leq (4-z)/2\}$ que representa um disco de raio $\sqrt{(4-z)/2}$ centrado no eixo dos z e à altura $z = z_0$.

Para $0 \leq z = z_0 < 2$, vamos ter o corte $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_0,\, x^2+y^2 \leq 3-z\}$ que representa um disco de raio $\sqrt{3-z}$ centrado no eixo dos z e à altura $z = z_0$.

Então,

$$Vol(A) = \int_0^2 (\int_0^{\sqrt{3-z}} (\int_0^{\sqrt{3-z-y^2}} dx)dy)dz + \int_2^4 (\int_0^{\sqrt{(4-z)/2}} (\int_0^{\sqrt{(4-z)/2-y^2}} dx)dy)dz.$$

b) De acordo com o exercício-teste 1, temos um sólido de revolução limitado por cima pela superfície obtida por revolução à volta do eixo dos z do gráfico da função

$$z = f(y) = \begin{cases} z = 4-2y^2, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ z = 3-y^2, & \text{se } 1 < y \leq \sqrt{3}. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} Vol(A) \;=\; & \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (\int_0^{4-2(x^2+y^2)} dz)dx)dy \\ + & \int_0^1 (\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} (\int_0^{3-(x^2+y^2)} dz)dx)dy + \int_1^{\sqrt{3}} (\int_0^{\sqrt{3-y^2}} (\int_0^{3-(x^2+y^2)} dz)dx)dy. \end{aligned}$$

c) Como f está definida por ramos que dependem de z é conveniente utilizar a expressão da alínea a). Temos $f = 0$ para $z > 2$ logo,

$$\int_A f = \int_0^2 (\int_0^{\sqrt{3-z}} (\int_0^{\sqrt{3-z-y^2}} (y\sqrt{3-z-y^2})dx)dy)dz =$$

$$= \int_0^2 (\int_0^{\sqrt{3-z}} y(3-z-y^2)dy)dz = \int_0^2 (\frac{1}{2}(3-z)^2 - \frac{1}{4}(3-z)^2)dz = (6+8/3)/4 = 13/6.$$