Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício teste 4

Escreva a expressão para o momento de inércia em torno do eixo Ox do sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y^2 + z^2}\}$$

com densidade de massa $f(x, y, z) = x$, em termos de integrais iterados de cada uma das seguintes formas:

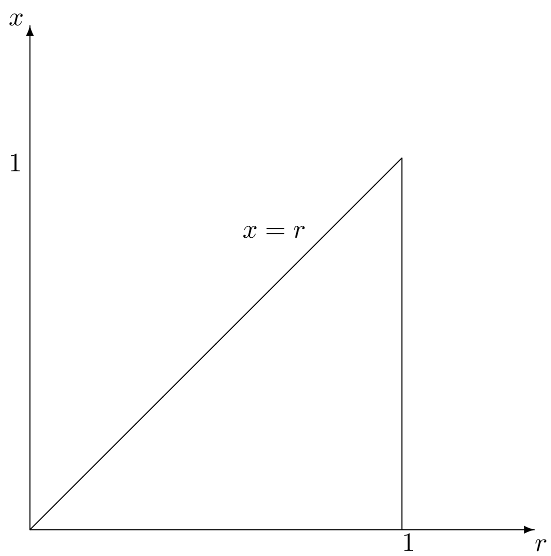
a) $\int \left(\int \left(\int dx\right) dy\right) dz$

b) $\int \left(\int \left(\int dz\right) dy\right) dx$

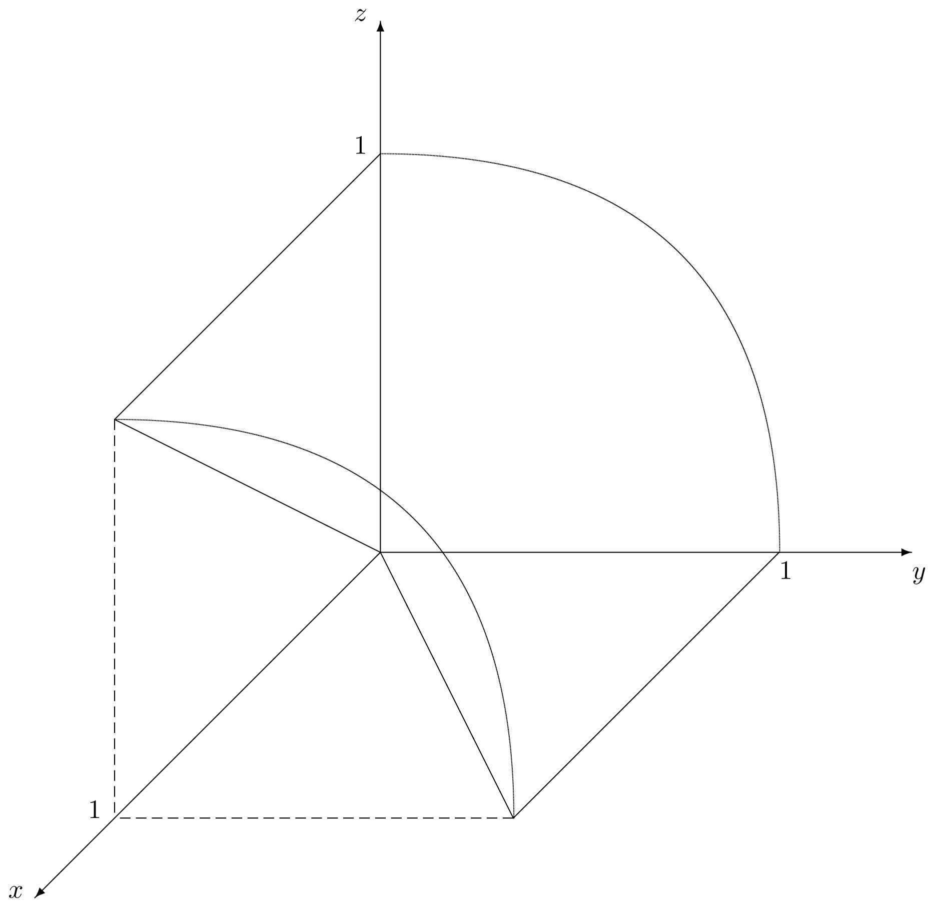
Solução: O sólido S tem simetria cilíndrica em torno do eixo Ox pelo que para ter uma ideia do seu aspecto basta esboçar a sua intersecção com um plano perpendicular ao plano Oyz contendo o eixo Ox.
Designando por $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ a distância ao eixo Ox temos

$$\begin{cases} y^2 + z^2 \leq 1 \\ x \leq \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r \leq 1 \\ x \leq r \end{cases}$$

Assim o sólido S consiste na figura



rodada em torno do eixo Ox sobre o quadrante do plano Oyz em que $y \geq 0$ e $z \geq 0$. Isto é, S tem o seguinte aspecto:



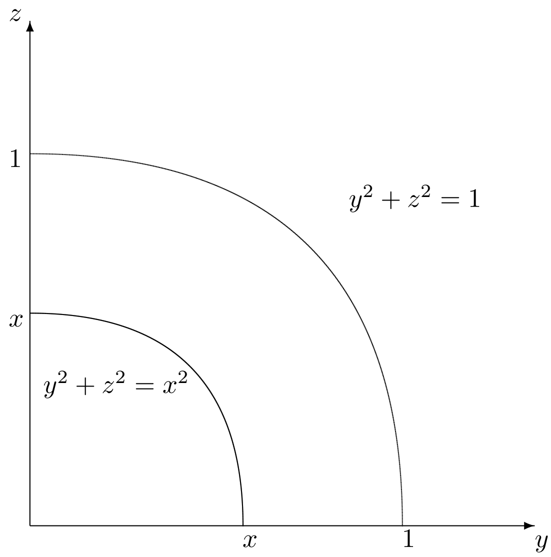
a) Claramente a projecção de S no plano Oyz é o quarto de círculo de raio 1, e para cada ponto $(0, y, z)$ nesta região x varia entre 0 e $\sqrt{y^2+z^2}$ portanto temos

$$I_x = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_0^{\sqrt{y^2+z^2}} x(y^2+z^2)dx \right) dydz$$

b) É claro da figura acima que x varia entre 0 e 1. Resta ver para cada destes valores de x qual é o domínio de variação de y e z, isto é achar os cortes de S por plano perpendiculares ao eixo Ox. Estes são dados pelas condições que definem o sólido S fazendo x constante:

$$\begin{aligned} y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \\ \sqrt{y^2+z^2} &\geq x \\ y^2+z^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Esta região tem o seguinte aspecto:



donde obtemos

$$I_x = \int_0^1 \left(\int_0^x \int_{\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x(y^2+z^2)dzdy + \int_x^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x(y^2+z^2)dzdy \right) dx$$