# Análise Matemática III
# 1º semestre de 2002/2003

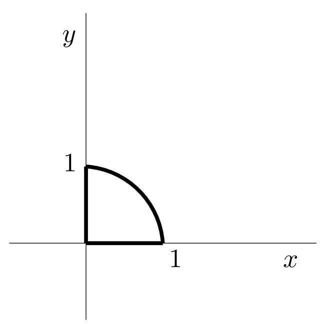
## Proposta de Resolução do Exercício Teste 3

1. Esboce a região de integração e exprima por uma diferente ordem de integração, à sua escolha, o integral
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy\ .$$

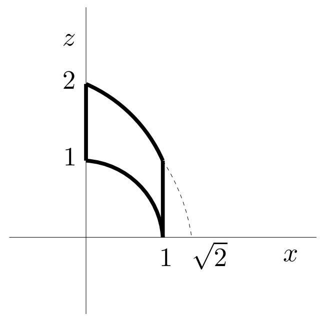
2. Usando integrais iterados com três diferentes ordens de integração à sua escolha, escreva (sem calcular) três expressões para o volume da porção da bola elipsoidal $2x^2+2y^2+z^2 \leq 8$ exterior ao cilindro vertical de raio 1, i.e., pontos satisfazendo também $x^2+y^2 \geq 1$.

### Resolução

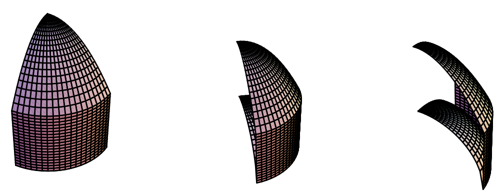
1. A equação $x=\sqrt{1-y^2}$ representa no plano $xy$ metade da circunferência $x^2+y^2=1$. A projecção da região de integração no plano $xy$, codificada nos limites dos dois integrais exteriores, é pois o quarto de disco dado por $x, y \geq 0$ e $x^2+y^2 \leq 1$, compreendido entre as linhas a grosso na figura seguinte:




A equação $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ representa o hemisfério norte ($z \geq 0$) da esfera unitária; a equação $z=2-x^2-y^2$ representa um parabolóide. O corte da região de integração no plano $y=0$ é a zona definida por $0 \leq x \leq 1$ e $\sqrt{1-x^2} \leq z \leq 2-x^2$, limitada pelas curvas a grosso:



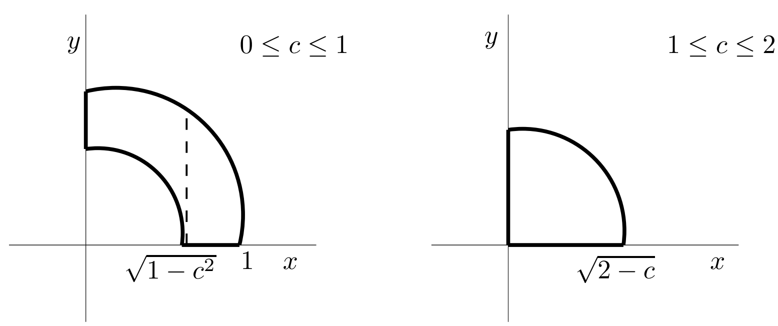

A região de integração é obtida desta superfície no plano $xz$ por revolução de 90º em torno do eixo dos $zz$. Os troços curvos da fronteira da região de integração estão representados na figura seguinte em três perspectivas; o resto da fronteira é dada por dois pedaços de plano.



A região é simétrica relativamente ao plano $x = y$ (i.e., ela é invariante por troca das coordenadas $x$ e $y$). Logo, a partir do integral dado, é simples obter o integral pela ordem de integração $dz\,dy\,dx$ (i.e., trocando apenas $dx$ e $dy$):

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx\ .$$

Assim se completa uma possível solução do exercício.
Em alternativa, pode-se considerar os cortes horizontais (i.e., $z =$constante) para obter os integrais pelas ordens $dx\,dy\,dz$ e $dy\,dx\,dz$.



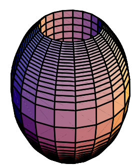

Os cortes $z = c$ com $0 \le c \le 1$ são quartos de coroa circular (limitados pela esfera e pelo cilindro): $x^2 + y^2 \ge 1 - c^2$ e $x^2 + y^2 \le 1$, com $x, y \ge 0$. Os cortes $z = c$ com $1 \le c \le 2$ são quartos de disco (limitados pelo parabolóide): $x^2+y^2 \leq 2-c$, com $x,y \geq 0$. Por isso, o integral dado pode ser reescrito, mais complicadamente, como

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_{\sqrt{1-z^2-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y,z)\,dy\,dx + \int_{\sqrt{1-z^2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y,z)\,dy\,dx \right) dz$$
$$+ \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-z}} \int_0^{\sqrt{2-z-x^2}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$

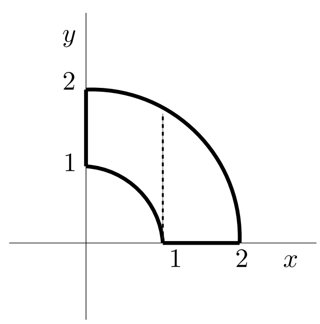
ou, trocando $x$ e $y$ dada a simetria da região,

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_{\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy + \int_{\sqrt{1-z^2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$
$$+ \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-z}} \int_0^{\sqrt{2-z-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \ .$$

2. Por simetria da região (que parece uma missanga), o volume total é oito vezes o volume da porção no primeiro octante.



Seja $S$ a porção da região no primeiro octante. A projecção de $S$ no plano $xy$ é o quarto de coroa circular dado por $x,y \geq 0$ e $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ e representado pela zona limitada pelas curvas a grosso na figura seguinte:



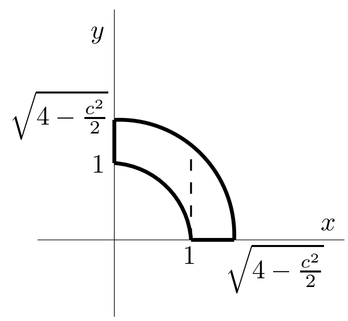

Por invariância da região por troca dos papéis de $x$ e $y$, obtêm-se logo duas expressões diferentes para o volume pedido:

$$\begin{aligned}
\text{Vol} &= 8 \times \left( \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{8-2x^2-2y^2}} dz\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{8-2x^2-2y^2}} dz\,dy\,dx \right) \\
&= 8 \times \left( \int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{8-2x^2-2y^2}} dz\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{8-2x^2-2y^2}} dz\,dx\,dy \right) .
\end{aligned}$$

A intersecção do cilindro com o elipsóide (algebricamente dada pela conjunção das equações $x^2 + y^2 = 1$ e $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 8$, a qual implica que $2 + z^2 = 8$) ocorre em $z = \pm\sqrt{6}$. Os cortes horizontais $z = c$ com $0 \leq c \leq \sqrt{6}$ são quartos de coroa circular dados por

$$x, y \geq 0 \;, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 - \frac{c^2}{2} \;,$$

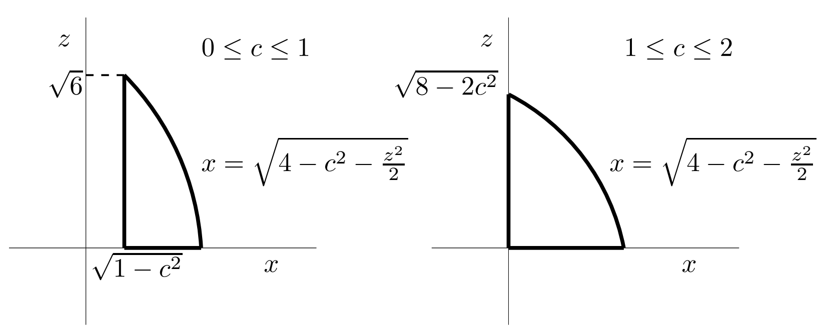
e representados de seguida:




Portanto, outras duas expressões para o volume pedido são:

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= 8 \times \int_0^{\sqrt{6}} \left( \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}-x^2}} dy\,dx + \int_1^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}}} \int_0^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}-x^2}} dy\,dx \right) dz \\ &= 8 \times \int_0^{\sqrt{6}} \left( \int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}-y^2}} dx\,dy + \int_1^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}}} \int_0^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}-y^2}} dx\,dy \right) dz \;. \end{aligned}$$

Finalmente, aplica-se de novo a estratégia dos cortes para obter as duas ordens de integração restantes (talvez aqui as menos convenientes das seis possíveis). O aspecto dos cortes $y = c$ tem dois casos.




Quando $1 \leq c \leq 2$, o corte é o quarto de disco elipsoidal dado por $x, z \geq 0$ e $2x^2 + z^2 \leq 8 - 2c^2$. Quando $0 \leq c \leq 1$, o corte é descrito por $x \geq \sqrt{1 - c^2}$,

$z \geq 0$ e $2x^2 + z^2 \leq 8 - 2c^2$. Os cortes $x = c$ são análogos, trocando os papéis de $x$ e $y$. Assim, o volume também pode ser dado por

$$\begin{aligned}
\text{Vol} &= 8 \times \left( \int_0^1 \int_0^{\sqrt{6}} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2-\frac{z^2}{2}}} dx\, dz\, dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{8-2y^2}} \int_0^{\sqrt{4-y^2-\frac{z^2}{2}}} dx\, dz\, dy \right) \\
&= 8 \times \left( \int_0^1 \int_0^{\sqrt{6}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2-\frac{z^2}{2}}} dy\, dz\, dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{8-2x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-\frac{z^2}{2}}} dy\, dz\, dx \right) .
\end{aligned}$$