Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício teste 3

Mostre que a função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

é uma função limite superior no intervalo $[0,1]$.

Solução: Temos de arranjar uma sucessão crescente de funções em escada, convergindo q.t.p. em $[0,1]$ e tal que a sucessão dos integrais é limitada. A maneira mais fácil de fazer isto é subdividir o intervalo $[0,1]$ sucessivamente de modo a que o comprimento dos subintervalos tenda para 0 e definir s_k como sendo constante igual ao mínimo de f em cada um destes subintervalos.

Mais precisamente, considere-se a sucessão de funções em escada

$$s_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 2^{-k} \\ \frac{e^{-\sqrt{\frac{n+1}{2^k}}}}{\sqrt{\frac{n+1}{2^k}}} & \text{se } \frac{n}{2^k} < x \leq \frac{n+1}{2^k} \text{ e } 1 \leq n < 2^k - 1 \end{cases}$$

Então

(i) $s_k(x) \leq s_{k+1}(x)$ porque os subintervalos onde a função $s_{k+1}(x)$ é constante estão contidos naqueles onde $s_k(x)$ é constante e ambas as funções são definidas como sendo o mínimo de f nestes intervalos.

(ii) $s_k(x) \to f(x)$ para todo o $x \in]0,1]$ porque a função f é contínua e o comprimento dos intervalos onde s_k é constante está a tender para 0 com k.

De facto, dado $x \in]0,1]$, temos

$$|f(x) - s_k(x)| \leq |f'(x)| 2^{-k}$$

Portanto $s_k(x) \to f(x)$.

Para $x = 0$, $s_k(x) = 0$ não converge para $f(0) = 1$ mas como o conjunto $\{0\}$ tem medida nula em $\mathbb{R}$, concluímos que $s_k(x) \to f(x)$ q.t.p. em $[0,1]$.

(iii) Como $s_k(x) \leq f(x)$ no intervalo $[\frac{1}{2^k}, 1]$ temos

$$\int_{[0,1]} s_k = \int_{\frac{1}{2^k}}^{1} s_k(x)dx \leq \int_{\frac{1}{2^k}}^{1} f(x)dx$$

onde o último integral existe e pode ser calculado da maneira usual uma vez que f é contínua no intervalo compacto $[\frac{1}{2^k}, 1]$. Assim

$$\int_{[0,1]} s_k \leq \int_{2^{-k}}^{1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_{2^{-k/2}}^{1} 2e^{-u} du = 2e^{-2^{-k/2}} - 2e^{-1} \leq 2 - 2e^{-1}$$

e portanto a sucessão dos integrais das funções s_k é limitada.

Concluímos que f é uma função limite superior.