Análise Matemática III
2º semestre de 2000/01

Exercício teste 3

1. Seja $f(x) = \frac{1}{x^2}$, e considere $x \in [1, +\infty[$.

a) Calcule os termos da sucessão $a_k = \int_k^{k+1} f(x)dx$, com $k \in \mathbb{N}$.

b) Determine se a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é ou não convergente e utilize esse resultado para determinar se $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ existe. Justifique (recorrendo, por exemplo, à definição de função limite superior).

2. Seja $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, e considere $x \in [1, +\infty[$.

a) Calcule os termos da sucessão $b_k = \int_{k^2}^{(k+1)^2} g(x)dx$, com $k \in \mathbb{N}$.

b) Determine se a série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ é ou não convergente e utilize esse resultado para determinar se $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ existe. Justifique (recorrendo, por exemplo, à definição de função limite superior).

NOTA: Este exercício destina-se a relacionar a integrabilidade de uma função contínua <u>positiva</u> $f(x)$ no intervalo $[1, +\infty[$, com o comportamento da série dos seus integrais em $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{N}$ (por exemplo). Utilizando-se a definição de função limite superior para justificar as respostas às alíneas 1b) e 2b), percebe-se que a positividade das funções envolvidas é importante para o argumento, pelo que o mesmo <u>não</u> pode ser utilizado da mesma forma para funções não positivas.

Solução:

1.

a) $a_k = \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_k^{k+1} = 1/k - 1/(k+1) = 1/k(k+1)$.

b) A série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k(k+1)$ é dominada pela série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ e portanto também é convergente.

Podemos então concluir que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ existe:

Basta tomar uma sucessão crescente de funções em escada $\{s_k\}$, tal que $s_k(x) \le f(x)$ se $1 \le x \le k+1$, e $s_k(x) = 0$ se $x > k+1$, e tal que $s_k \to f$ quando $k \to \infty$. Então, vamos ter $\int_1^{+\infty} s_N(x)dx = \int_1^{N+1} s_N(x)dx \le \sum_{k=1}^{N} a_k$, e portanto a sucessão crescente dos integrais $\{\int_1^{+\infty} s_N(x)dx\}$ é majorada por $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e consequentemente $f(x)$ é uma função limite superior em $[1, +\infty[$ e logo integrável nesse intervalo.

2. a) $b_k = \int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_{k^2}^{(k+1)^2} = 2(k+1-k) = 1$.

b) A série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ é evidentemente divergente uma vez que $b_k = 1$ para todo o k.

Podemos concluir que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ não existe:

Basta observar que se $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ existisse então teríamos

$$\sum_{k=1}^{N} b_k = \int_1^{(N+1)^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

para todo o N, o que é absurdo porque a série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ é divergente.