Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º semestre de 2004/2005

Exercício-Teste 3 (a entregar na aula prática ou na aula teórica de 30, 31 de Março ou 1 de Abril de 2005)

1) Dados números reais a, b e c não-negativos, considerem-se os conjuntos

$$E(a,b,c) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\} \text{ e}$$
$$E(a,b,c)^+ = E(a,b,c) \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0;\ y \geq 0;\ z \geq 0\}.$$

Calcule $\int_{E(a,b,c)} xyz$ e $\int_{E(a,b,c)^+} xyz$.

2) Considere o conjunto do Exercício-Teste 1

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x+y \leq 1\,;\ z \geq 0\,;\ x \geq 0\,;\ y \geq 0\}\,.$$

Cacule o volume de V através de um integral da forma $\int(\int(\int 1dx)dy)dz$.

Resolução:

1) Aplicando o teorem de Fubini obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_{E(a,b,c)} xyz &= \int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \int_{-c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} xyz\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} xy \frac{z^2}{2}\Big|_{z=-c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}^{z=c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} dy\, dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{E(a,b,c)^+} xyz &= \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \int_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} xyz\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} xy \frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} dy\, dx \\
&= \frac{c^2}{2} \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} xy \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy\, dx \\
&= \frac{c^2}{2} \int_0^a x \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \left(-\frac{b^2}{2\cdot 2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=b\sqrt{1-x^2/a^2}} dx \\
&= \frac{b^2c^2}{8} \int_0^a x \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 dx \\
&= \frac{(abc)^2}{48}\,.
\end{aligned}$$

2) Utilizando o corte da figura 2 do Exercício-Teste 1, obtém-se que o volume de V é

$$\int_0^1 \left[\left(\int_0^z \int_{z-y}^{1-y} dx\, dy\right) + \left(\int_z^1 \int_0^{1-y} dx\, dy\right)\right] dz = \frac{1}{3}$$