

## Análise Matemática III

### 1º semestre de 1999/2000

#### Exercício teste 2

Indique justificadamente se os seguintes conjuntos têm ou não medida nula.

a)  $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = n\}$

b)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$

c)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \text{sen}(xy)\}$

#### Solução:

a)  $S$  é a união da família numerável de conjuntos

$$S_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = n\}$$

Cada um destes conjuntos tem conteúdo nulo (e portanto medida nula) porque é a união dos gráficos em  $\mathbb{R}^3$  das funções contínuas  $\sqrt{n - x^2 - y^2}$  e  $-\sqrt{n - x^2 - y^2}$  sobre os conjuntos compactos em  $\mathbb{R}^2$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq n\}$$

Portanto  $S$  tem medida nula.

b)  $S$  contém o intervalo  $[1, 2] \times [0, 1]$  que não tem medida nula portanto  $S$  também não tem medida nula (um subconjunto de um conjunto com medida nula tem medida nula).

c) Podemos escrever  $S$  como a união numerável

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$$

onde

$$S_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \text{sen}(xy), -n \leq x \leq n, -n \leq y \leq n\}$$

Como  $S_n$  é o gráfico em  $\mathbb{R}^3$  da função contínua  $\text{sen}(xy)$  sobre o intervalo compacto  $[-n, n] \times [-n, n]$ ,  $S_n$  tem conteúdo nulo (e portanto medida nula). Logo  $S$  tem medida nula.