Análise Matemática III
1º semestre de 2001/02

Exercício teste 2

1. O Sr. Gaudêncio tem uma horta rectangular descrita pelo intervalo $I = [0,4] \times [1,6] \subset \mathbb{R}^2$. A horta encontra-se sub-dividida em quatro rectângulos mais pequenos

$$I_1 = [0,2] \times [1,2]; I_2 = [0,2] \times [2,6]; I_3 = [2,4] \times [1,2]; I_4 = [2,4] \times [2,6].$$

Todos estes comprimentos encontram-se em metros (m).

Em cada sub-rectângulo I_j encontra-se plantada uma espécie diferente de batata transgénica, tal que a produção anual de batata por unidade de área é respectivamente:

$$\rho_1 = \pi;\ \rho_2 = 3;\ \rho_3 = \sqrt{2}e;\ \rho_4 = 5 \quad \text{(em unidades de } Kg/(m^2 \times ano)).$$

Utilize uma função em escada apropriada e calcule o seu integral para obter a produção anual de batata (em Kg) conseguida pelo Sr. Gaudêncio.

2. Considere o conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\text{sen}\,(t)),\ t \in [0,+\infty[\}.$$

Diga se E tem ou não medida nula e justifique.

Solução:

1. Considere-se a partição do intervalo I dada pelos I_j e considere-se a função em escada $\rho : I \to \mathbb{R}$ tal que $\rho(x,y) = \rho_j$ se $(x,y) \in int(I_j)$ com

$$\begin{array}{rcl} \rho_1 &=& \pi \\ \rho_2 &=& 3 \\ \rho_3 &=& \sqrt{2}e \\ \rho_4 &=& 5 \end{array}.$$

Note-se que não é relevante especificarmos o valor da função em escada ρ na fronteira dos sub-intervalos I_j uma vez que esses valores não vão afectar o valor do integral.

Uma vez que a massa de batata em Kg produzida num ano é dada pela área vezes a produção por unidade de área temos:

$$\int_I \rho = \sum_{j=1}^{4} \rho_j vol(I_j) = \pi \times 2 + 3 \times 8 + \sqrt{2}e \times 2 + 5 \times 8 = 64 + 2\sqrt{2}e + 2\pi.$$

A produção anual de batata é então de $64 + 2\sqrt{2}e + 2\pi\ Kg$.

O integral é obtido pela soma dos volumes-3 de quatro paralelipípedos-3, P_j com $j = 1, 2, 3, 4$, tal que a base de cada P_j é formada por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in I_j, z = 0\}$ e que a altura de P_j é dada por ρ_j.

2. O conjunto E consiste numa espiral que começa no ponto $(1, 0)$ e vai dando voltas à origem no sentido anti-horário, tal que o seu raio vai diminuindo à medida que t aumenta devido ao factor de e^{-t}.

Intuitivamente, esperamos que E tenha medida nula uma vez que é uma curva "bem comportada" em $\mathbb{R}^2$. Para o demonstrar:

Podemos decompor o intervalo $[0, +\infty[$ na união dos intervalos $I_k = [k\pi, (k+1)\pi]$ para $k = 0, 1, 2, ...$ Quando $t \in I_k$ e k é par estamos a descrever um arco da espiral que vai desde o semi-eixo positivo dos x até ao semi-eixo negativo dos x, ou seja um arco que está no semi-plano superior $y \geq 0$. Quando k é ímpar descrevemos um arco no semi-plano inferior $y \leq 0$.

Seja E_k o arco da espiral correspondente a $t \in I_k$. Então a espiral E é a união numerável destes arcos,

$$E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k.$$

Ora, é fácil de observar que cada cada arco E_k é o gráfico em $\mathbb{R}^2$ de uma função contínua definida num intervalo compacto contido em $\mathbb{R}$. (A expressão explícita desta função é difícil de obter mas sabemos que ela existe uma vez que para $t \in I_k$ a função $x(t) = e^{-t}\cos(t)$ é injectiva e tem inversa contínua.) Logo, cada um dos arcos E_k tem medida nula e concluímos que a união numerável de todos eles, ou seja a espiral E, também tem medida nula.