# Análise Matemática III
# 2º semestre de 2000/01

## Exercício teste 2

1. Seja $I \subset \mathbb{R}^3$ o intervalo $I = ]0,2[\times]0,2[\times]0,1[$, e seja $s : I \to \mathbb{R}$ a função em escada definida por

$$s(x,y,z) = \begin{cases} 1/2 & 0 < x < 1 \ , \ 0 < y < 1 \ , \ 0 < z < 1/2 \\ 3 & 0 < x < 1 \ , \ 1 < y < 2 \ , \ 0 < z < 1/2 \\ 7 & 1 < x < 2 \ , \ 0 < y < 1 \ , \ 0 < z < 1/2 \\ \pi & 1 < x < 2 \ , \ 1 < y < 2 \ , \ 0 < z < 1/2 \\ 9 & 0 < x < 2 \ , \ 0 < y < 2 \ , \ 1/2 < z < 1 \end{cases}$$

a) Calcule $\int_I s$.

b) Se $s$ tiver unidades de densidade de carga, por exemplo $Coulomb/cm^3$, e se os comprimentos, i.e. $x, y, z$, estiverem expressos em $cm$, em que unidades vem $\int_I s$ ?

2. Considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}.$$

Diga se $A$ tem ou não medida nula e justifique.

**Solução:**

1.

a) Considere-se a partição do intervalo $I$ dada por $\{I_j\,;\, j = 1,2,3,4,5\}$ em que

$$\begin{aligned} I_1 &= ]0,1[\times]0,1[\times]0,1/2[ \\ I_2 &= ]0,1[\times]1,2[\times]0,1/2[ \\ I_3 &= ]1,2[\times]0,1[\times]0,1/2[ \\ I_4 &= ]1,2[\times]1,2[\times]0,1/2[ \\ I_5 &= ]0,2[\times]0,2[\times]1/2,1[ \end{aligned}$$

Considerem-se também o conjunto de valores $\{s_j\,;\, j = 1,2,3,4,5\,\}$ dados por

$$\begin{aligned} s_1 &= 1/2 \\ s_2 &= 3 \\ s_3 &= 7 \\ s_4 &= \pi \\ s_5 &= 9 \end{aligned}$$

Assim, temos $s(x,y,z) = s_j$ para $(x,y,z) \in I_j$, ou seja o integral é dado por

$$\int_I s = \sum_{j=1}^{5} s_j vol(I_j) = 1/2\times1/2+3\times1/2+7\times1/2+\pi\times1/2+9\times2 = 1/4+23+\pi/2.$$

Note-se que para o cálculo do integral não são relevantes os valores que $s$ toma nas fronteiras dos intervalos $I_j$.

O integral é obtido pela soma dos volumes-4 de cinco paralelipípedos-4, $P_j$ com $j = 1, 2, 3, 4, 5$, tal que a base de cada $P_j$ é formada por $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z) \in I_j, w = 0\}$ e que a altura de $P_j$ é dada por $w = s_j$.

b) Se $x, y, z$ estão em $cm$, então $vol(I_j)$ vem em $cm^3$ e se $s_j$ está em $Coulomb/cm^3$ temos pelo cálculo do integral que $\int_I s$ tem unidades de carga, $Coulomb$.

2. O conjunto $A$ é um plano em $\mathbb{R}^3$ logo tem medida nula. Podemos justificá-lo da seguinte forma: $A$ é o gráfico da função contínua $z = f(x, y) = 1 - x - y$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sabemos que os gráficos, em $R^n$, de funções contínuas definidas em sub-conjuntos compactos de $\mathbb{R}^{n-1}$ e com valores em $\mathbb{R}$, têm medida nula. Ora, $\mathbb{R}^2$ é a união numerável dos intervalos compactos $I_{nm} = [n, n+1] \times [m, m+1]$, com $n, m \in \mathbb{Z}$. O gráfico de $f$ sobre $I_{nm}$ tem portanto medida nula e temos então que o gráfico de $f$ sobre $\mathbb{R}^2$, que é a união dos gráficos de $f$ sobre todos os $I_{nm}$, é a união numerável de conjuntos de medida nula, pelo que tem medida nula também, como queríamos mostrar.