Análise Matemática III
2º semestre de 2000/2001

Exercício Teste Resolvido 14

Enunciado:

Um partícula move-se em $\mathbb{R}^3$ sendo a sua posição no instante $t \geq -1$ dada por:

$$x(t) = \int_0^t e^{-2u^2} u du, \quad y(t) = \int_{-1}^{1+t^2} \cos(\frac{u}{2}) \frac{1}{1+u^2} du \quad \text{e} \quad z(t) = \int_0^{1+t+t^2} \text{sen}(tu^2 + \pi) e^{-u^3} du.$$

a) Determine se a trajectória da partícula é ou não limitada ao longo do eixo dos x, i.e. determine se existe ou não $\lim_{t \to +\infty} x(t)$.

b) O mesmo de a) para $y(t)$.

c) Calcule a componente z da velocidade da partícula no instante $t = 0$.

Solução:

a) O problema é determinar se existe $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-2u^2} u du$. Seja $f(u) = e^{-2u^2} u$ com $u \in [0, +\infty[$. Seja $f_k : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, ...$ definida por

$$\begin{cases} f(u) & u \in [0, k] \\ 0 & u > k. \end{cases}$$

A sucessão $\{f_k\}$ é crescente. As funções f_k são contínuas nos compactos $[0, k]$ e zero fora deles logo são integráveis em $[0, +\infty[$. Vamos tentar majorar os integrais dos termos da sucessão: A função $e^{-u^2} u$ tende para zero quando $u \to +\infty$. Logo existe $M > 0$ tal que $e^{-u^2} u < M$, $\forall u \in [0, +\infty[$. Então

$$\int_0^{+\infty} f_k du = \int_0^k e^{-2u^2} u du \leq M \int_0^k e^{-u^2} du < M \int_0^1 e^{-u^2} du + M \int_1^k e^{-u} du =$$

$$= M \int_0^1 e^{-u^2} du + M(e^{-1} - e^{-k}) \leq M \int_0^1 e^{-u^2} du + M e^{-1}.$$

(Utilizámos apenas o facto de $e^{-u^2} < e^{-u}$ se $u > 1$.) Logo a sucessão $\{\int_0^{+\infty} f_k\}$ é limitada. Pelo teorema da convergência monótona de Levi temos então que existe o limite

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{k\to+\infty} \int_0^k f_k(u) du = \lim_{k\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_k(u) du = \int_0^{+\infty} \lim_{k\to+\infty} f_k(u) du = \int_0^{+\infty} f(u) du,$$

pelo que o movimento ao longo do eixo dos x é limitado.

b) Seja $g(u) = \cos(\frac{u}{2}) \frac{1}{1+u^2}$. Seja $g_k : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, ...$ definida por

$$\begin{cases} g(u) & u \in [-1, k] \\ 0 & u > k. \end{cases}$$

A questão é saber se existe o limite $\lim_{k\to+\infty} \int_{-1}^k g(u) du = \lim_{k\to+\infty} \int_{-1}^{+\infty} g_k(u) du$.

As funções g_k são integráveis em $[-1, +\infty[$ porque são contínuas nos compactos $[-1, k]$ e zero fora deles. Por outro lado $|g_k(u)| \leq h(u)$, $\forall u \in [-1, +\infty[$ onde $h(u) = \frac{1}{1+u^2}$. A função $h(u)$ é integrável (e até é limite superior) em $[-1, +\infty[$: basta utilizar o teorema da converg encia monótona e verificar que a sucessão

$$\int_{-1}^j \frac{du}{1+u^2} du = arctan(j) + \pi/2$$

é limitada.

Por outro lado temos que $\lim_{k\to+\infty} g_k = g$ em $[-1,+\infty[$. Logo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, o movimento ao longo dos y é limitado e

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{k\to+\infty} \int_{-1}^{k} g_k(u)du = \lim_{k\to+\infty} \int_{-1}^{+\infty} g_k(u)du =$$

$$= \int_{-1}^{+\infty} \lim_{k\to+\infty} g_k(u)du = \int_{-1}^{+\infty} g(u)du.$$

c) Seja $\alpha(t) = 1 + t + t^2$. Consideremos

$$I(t,w) = \int_0^w \operatorname{sen}(tu^2+\pi)e^{-u^3}du.$$

Então temos $z(t) = I(t,\alpha(t))$ e a componente em z da velocidade será

$$z'(t) = \frac{\partial I}{\partial t}(t,\alpha(t)) + \frac{\partial I}{\partial w}(t,\alpha(t))\alpha'(t) = \frac{\partial I}{\partial t}(t,\alpha(t)) + \frac{\partial I}{\partial w}(t,\alpha(t))(1+2t) =$$

$$= \frac{\partial I}{\partial t}(t,\alpha(t)) + \operatorname{sen}(t(1+t+t^2)^2+\pi)e^{-(1+t+t^2)^3}(1+2t).$$

Para calcular $\frac{\partial I}{\partial t}$ utilizamos a regra de Leibniz. A integranda tem derivadas contínuas e a região de integração é compacta. Obtemos pela regra de Leibniz

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \int_0^w \frac{\partial(\operatorname{sen}(tu^2+\pi)e^{-u^3})}{\partial t}du = \int_0^w u^2\cos(tu^2+\pi)e^{-u^3}du.$$

Substituindo em $t=0$ obtemos

$$z'(0) = (\int_0^1 u^2\cos(\pi)e^{-u^3}du) + \operatorname{sen}(\pi)e^{-1} = -\int_0^1 u^2e^{-u^3}du = (1/3)(e^{-1}-1).$$