Análise Matemática III
1º semestre de 2002/2003

Exercício teste 13
(RESOLUÇÃO)

Considere a superfície (2-variedade):

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = y^2, 1 < y < 2\},$$

e o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x, y, z) = (xe^y, -2e^y, ze^y).$$

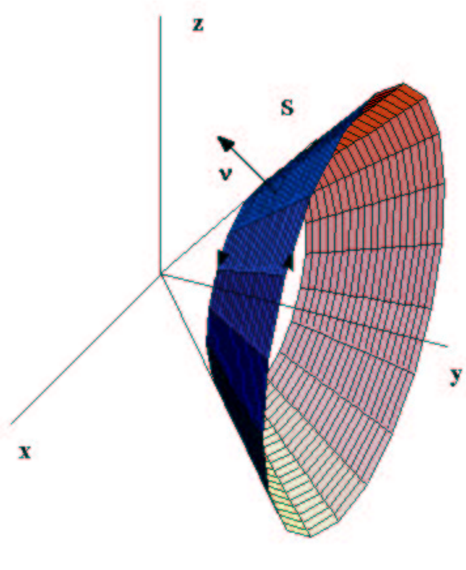
Calcule o fluxo $\int_S F \cdot \nu$ segundo a direcção da normal ν que tem segunda componente negativa, de três formas distintas:

(a) pela definição de fluxo;

(b) utilizando o Teorema da Divergência;

(c) utilizando o Teorema de Stokes.

(a) A superfície S é uma porção de um cone como esboçado na seguinte figura:



Consideremos a seguinte parametrização do cone:

$$g(r, \theta) = (r\cos\theta, r, r\sin\theta), \quad 1 \leq r \leq 2, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Como
$$\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = (r\cos\theta, -r, r\sin\theta),$$
esta parametrização induz a normal ν correcta. Assim obtemos que o fluxo é dado por:

$$\begin{aligned}
\iint_S F\cdot\nu &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} F(g(r,\theta))\cdot \frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}\, d\theta dr \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} (re^r\cos\theta, -2re^r, re^r\sin\theta)\cdot (r\cos\theta, -r, r\sin\theta) d\theta \right) dr \\
&= 2\pi \int_1^2 (r^2+2r)e^r dr = 2\pi(4e^2 - e).
\end{aligned}$$

(b) Observe que div $F = 0$ logo o Teorema da Divergência mostra que

$$\iint_S F\cdot\nu + \iint_{T_0} F\cdot\nu + \iint_{T_1} F\cdot\nu = 0,$$

onde T_0 e T_1 são os discos (tampas) que conjuntamente com S delimitam a região $R = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \le y^2, 1\le y\le 2\}$, e ν é a normal exterior a R.

Para calcular o fluxo através de T_0 observe que a normal a T_0 é $\nu = (0,-1,0)$, logo $F(x,1,z)\cdot\nu = 2e$. Assim:

$$\iint_{T_0} F\cdot\nu = \iint_{T_0} 2e = 2\pi e.$$

Para calcular o fluxo através de T_1 observe que a normal a T_1 é $\nu = (0,1,0)$, logo $F(x,2,z)\cdot\nu = -2e^2$. Assim:

$$\iint_{T_0} F\cdot\nu = \iint_{T_1} -2e^2 = -8\pi e^2.$$

Obtemos novamente:

$$\iint_S F\cdot\nu = -\iint_{T_0} F\cdot\nu - \iint_{T_1} F\cdot\nu = 2\pi(4e^2 - e).$$

(c) Como F é um campo vectorial em $\mathbb{R}^3$ com divergência nula, sabemos que $F = \text{rot } A$, para algum campo vectorial A. Se procurarmos um potencial vector da forma $A = (A_1, 0, A_3)$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} = xe^y \\[2ex] \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = -2e^y \\[2ex] -\frac{\partial A_1}{\partial y} = ze^y. \end{cases}$$

que admite a solução
$$A = (-ze^y, 0, xe^y).$$

Pelo Teorema de Stokes:

$$\iint_S F \cdot \nu = \iint_S \text{rot } A \cdot \nu = \oint_{C_0} A \cdot dg_0 + \oint_{C_1} A \cdot dg_1,$$

onde C_0 e C_1 são as circunferências que limitam os discos T_0 e T_1, com as orientações apropriadas.

Para C_0 uma parametrização com a orientação apropriada é dada por:

$$g_0(t) = (\cos t, 1, -\sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Assim, calculamos:

$$\begin{aligned}\oint_{C_0} A \cdot dg_0 &= \int_0^{2\pi} A(g_0(t)) \cdot g_0'(t) dt \\ &= -\int_0^{2\pi} e dt = -2\pi e.\end{aligned}$$

Por outro lado, para C_1 uma parametrização com a orientação apropriada é dada por:

$$g_1(t) = (2\cos t, 2, 2\sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Assim, calculamos:

$$\begin{aligned}\oint_{C_1} A \cdot dg_1 &= \int_0^{2\pi} A(g_1(t)) \cdot g_1'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 4e^2 dt = 8\pi e^2.\end{aligned}$$

Concluímos novamente que:

$$\iint_S F \cdot \nu = \oint_{C_0} A \cdot dg_0 + \oint_{C_1} A \cdot dg_1 = 2\pi(4e^2 - e).$$