Análise Matemática III
2º semestre de 2000/2001

Exercício Teste 13

Enunciado:

Considere a superfície, constituída pela parte superior de um toro, definida por

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1,\ z > 0\}.$$

Seja n a normal unitária a M cuja componente segundo os z é positiva.

a) Calcule o fluxo do campo vectorial $f(x, y, z) = (x + \mathrm{arcatn}(y^2 + z^3), \exp(z - x^3), z^2 - z + 1)$ através de M segundo n. (Sugestão: Utilize o teorema da divergência.)

b) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo $h(x, y, z) = (0, 0, 2)$ através de M no sentido de n.

Solução:

a) Seja V o volume limitado por M e pelo plano $z = 0$ i.e.

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 < 1,\ z > 0\}.$$

A fronteira de V é formada pela superfície toroidal M e pela coroa circular D contida no plano xy entre as circunferências de raios 1 e 3 centradas na origem, i.e.

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 < 1,\ z = 0\}.$$

A normal n a M é exterior a V. A normal unitária a D que é exterior a V é simplesmente $\nu = (0, 0, , -1)$.

Assim, o teorema da divergência afirma que

$$\int_V \mathrm{div}(f)\, dxdydz = \int_M f \cdot n + \int_D f \cdot \nu.$$

Ora, $\mathrm{div}(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 2z$. Temos então em coordenadas cilíndricas

$$\int_V \mathrm{div}(f)\, dxdydz = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^3 \left(\int_0^{\sqrt{1-(\rho-2)^2}} 2zdz \right) \rho d\rho \right) d\theta = 2\pi \int_1^3 (1-(\rho-2)^2) \rho d\rho = 2\pi(4-4/3).$$

Por outro lado par calcular o fluxo de f através de D observamos que $f \cdot \nu = -z^2 + z - 1$ que é igual a -1 em D. Logo, $\int_D f \cdot \nu = -Area(D) = -\pi(3^2 - 1^2) = -8\pi$. Logo,

$$\int_M f \cdot n = 2\pi(4 - 4/3) - (-8\pi) = (16 - 8/3)\pi.$$

Note-se que teria sido substancialmente mais difícil fazer o mesmo cálculo directamente a partir da definição.

b) O teorema de Stokes relaciona o fluxo do rotacional de um campo através de uma superfície com o trabalho desse campo na fronteira da superfície. Assim o primeiro passo é exprimir o campo $h(x, y, z)$ como um rotacional de outro campo vectorial. Procuramos então um campo vectorial $g(x, y, z)$ tal que $\mathrm{rot}\,(g) = h$ i.e. $h_1 = 0 = \partial_2 g_3 - \partial_3 g_2$, $h_2 = 0 = \partial_3 g_1 - \partial_1 g_3$ e $h_3 = 2 = \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1$. (Diz-se que g é um "potencial vectorial" para h.) Há muitas soluções para estas equações. Podemos, por exemplo, tentar encontrar uma solução com $g_2 = 0$. A terceira equações diz então $g_1 = -2y + l(x, z)$. Pondo $l(x, z) = 0$ vemos que é possível satisfazer as equações restantes com $g_3 = 0$. Logo, podemos tomar $g(x, y, z) = (-2y, 0, 0)$.

A fronteira de M é constituída por duas circunferências no plano x, y e centradas na origem: A de raio 1 e B de raio 3. Para quem está de pé em cima do plano xy do lado dos $z > 0$, a orientação destas fronteiras que é consistente com a normal n é A no sentido horário e B no sentido anti-horário. Deste modo, percorrendo A ou B do lado dos $z > 0$, ou seja do lado para que aponta a normal n, temos a superfície M do nosso lado esquerdo como é correcto.

Então pelo teorema de Stokes:

$$\int_M h \cdot n = \int_M \mathrm{rot}\,(g) \cdot n = \int_A g + \int_B g.$$

Temos de calcular o trabalho de g ao longo de A e B. Podemos parametrizar A através de $\alpha(\theta) = (\cos(\theta), -\mathrm{sen}(\theta), 0)$ e B com $\beta(\theta) = (\sqrt{3}\cos(\theta), \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta), 0)$, pondo $0 < \theta < 2\pi$. Então

$$\int_A g = \int_0^{2\pi} g(\alpha(\theta)\cdot\alpha'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} (2\mathrm{sen}(\theta), 0, 0)\cdot(-\mathrm{sen}(\theta), -\cos(\theta), 0)d\theta = -\int_0^{2\pi} 2\mathrm{sen}(\theta)^2 d\theta = -2\pi.$$

De modo semelhante temos

$$\int_B g = \int_0^{2\pi} g(\beta(\theta) \cdot \beta'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} (-2\sqrt{3}\mathrm{sen}(\theta), 0, 0) \cdot (-\sqrt{3}\mathrm{sen}(\theta), \sqrt{3}\cos(\theta), 0)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} 6\,\mathrm{sen}(\theta)^2 d\theta = 6\pi.$$

Logo, $\int_M h \cdot n = 6\pi - 2\pi = 4\pi$.

Note-se que teria sido substancialmente mais difícil fazer o mesmo cálculo directamente a partir da definição.