

**Análise Matemática III**  
**1º semestre de 2000/2001**  
(a entregar na semana de 18/12/2000)

**Exercício Teste 13**

Considere um filtro de ar cuja forma é aproximadamente a do conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4\},$$

imerso numa corrente de ar cujo campo de velocidades é dado pela fórmula

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2yze^{y^2}, 2xze^{x^2}, -2 + xy).$$

- a) Mostre que a quantidade de ar no interior do filtro se mantém constante, supondo que a densidade do ar é constante igual a 1.
- b) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de ar que **sai** através da parede curva do filtro.

**Solução:**

- a) Pelo teorema da divergência, o fluxo total de ar através das paredes do filtro é

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \int_D \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Como  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ , o fluxo é zero. Portanto a quantidade de ar que entra no filtro é igual à que sai.

- b) Seja  $C$  a parede curva de  $D$ . Note-se que  $\mathbf{F}$  é um campo de divergência nula em  $\mathbb{R}^3$ . Como  $\mathbb{R}^3$  é um conjunto em estrela, podemos concluir que  $\mathbf{F}$  é um rotacional, ou seja, existe um campo  $\mathbf{L}$  tal que  $\nabla \times \mathbf{L} = \mathbf{F}$ . Um campo  $\mathbf{L}$  que satisfaça esta equação é um potencial vector para  $\mathbf{F}$ .

Para calcular o fluxo de  $\mathbf{F}$  através de  $C$ , podemos começar por calcular um potencial vector  $\mathbf{L}$  para  $\mathbf{F}$  e depois aplicar o teorema de Stokes a  $\mathbf{L}$ . Calcular  $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$  consiste em resolver o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial L_3}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial z} = 2yze^{y^2} \\ \frac{\partial L_1}{\partial z} - \frac{\partial L_3}{\partial x} = 2xze^{x^2} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} = -2 + xy \end{cases}$$

A solução para este sistema não é única. Para encontrar uma solução particular, podemos procurar uma solução que satisfaça, por exemplo,  $L_1 = 0$ . Obtemos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L_3}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial z} = 2yze^{y^2} \\ -\frac{\partial L_3}{\partial x} = 2xze^{x^2} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} = -2 + xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L_3}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial z} = 2yze^{y^2} \\ L_3 = -ze^{x^2} + f(y, z) \\ L_2 = -2x + \frac{1}{2}x^2y + g(y, z) \end{cases}$$

Mais uma vez, a solução não é única. Impondo  $g = 0$  e substituindo na primeira equação, vem  $f(y, z) = ze^{y^2}$ , logo

$$\mathbf{L} = (0, -2x + \frac{1}{2}x^2y, ze^{y^2} - ze^{x^2}).$$

Seja  $C$  a parede curva de  $D$ . Pelo teorema de Stokes,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \int_{\partial C} \left(-2x + \frac{1}{2}x^2y\right)dy + (ze^{y^2} - ze^{x^2})dz,$$

onde  $\mathbf{n}$  é a normal unitária que aponta para **fora** do filtro e conseqüentemente  $\partial C$  é percorrido no sentido **negativo** quando visto do ponto  $(0, 0, 10000)^*$ . Uma parametrização para

$$\partial C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = 4\},$$

na direcção indicada é  $g(t) = (2 \cos(t), -2 \sin(t), 4), t \in [0, 2\pi]$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} \left(-2x + \frac{1}{2}x^2y\right)dy + (ze^{y^2} - ze^{x^2})dz &= \\ \int_0^{2\pi} (0, -4 \cos(t) - \frac{8}{2} \cos^2(t) \sin(t), 2e^{4 \sin^2(t)} - 2e^{4 \cos^2(t)}) \cdot (-2 \sin(t), -2 \cos(t), 0) dt &= \\ &= \int_0^{2\pi} 8 \cos^2(t) + 8 \cos^3(t) \sin(t) dt = 8\pi, \end{aligned}$$

portanto a quantidade de ar que sai através da parede curva do filtro é  $8\pi$ .

---

\*Apesar de  $\partial C$  não se ver bem deste ponto