

Análise Matemática III

1º semestre de 2001/02

Exercício Teste 13

No ano 2150 o trânsito em Lisboa tornou-se caótico ! Na verdade, é preciso recuar ao longínquo ano de 2113 — ano em que o automóvel foi finalmente substituído pelo disco voador — para encontrar congestionamentos desta magnitude.

Para obviar a esta grave situação, o presidente da edilidade alfacinha, Celestino Gaudêncio, decidiu levar a cabo uma alteração dos sentidos do trânsito em algumas das principais artérias da cidade de Ulisses. No ponto de confluência de todas as vias afectadas está o conhecido “Hiperbolóide de Pombal”, onde os técnicos camarários esperavam que viessem a sentir-se melhorias imediatas na circulação, enquanto os adversários de Celestino previam que viesse a dar-se um estrangulamento do tráfego que provocasse o estrangulamento político do conhecido autarca.

À hora de ponta do dia de entrada em funcionamento do novo esquema de trânsito, Celestino decidiu enviar para o “Hiperbolóide de Pombal” o mais qualificado agente da divisão de trânsito da polícia, Firmino Gaudêncio¹, a fim de aferir o sucesso do mesmo. O Agente Gaudêncio — como Firmino é conhecido nos meios policiais — destacou-se na Academia de Polícia por ter tido 20 valores no exame de AMIII, que desde há muitos anos é obrigatório para aceder à divisão de trânsito. Trinta segundos depois de chegar ao local, Firmino já tinha a resposta para as interrogações do seu primo.

Sabendo que o “Hiperbolóide de Pombal” — esse ex-líbris da cidade de Lisboa — tem a forma do conjunto

$$\text{HP} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2, -1 < z < 1\},$$

que as densidades de fluxo do trânsito, antes e depois da entrada em vigor das medidas de Celestino, são dadas por

$$f_{ac}(x, y, z) = 10^5(x, -y, -z)$$

e

$$f_{dc}(x, y, z) = f_{ac}(x, y, z) + (1, -1, 2x - 2y),$$

respectivamente, determine os valores obtidos pelo Agente Gaudêncio para o número discos voadores que saem do “Hiperbolóide de Pombal” por unidade de tempo (*i.e.* calcule o fluxo do campo):

- (a) antes das medidas de Celestino, usando o teorema da divergência;
- (b) depois das medidas de Celestino, usando o resultado de (a) e o teorema de Stokes.

Solução:

- (a) Consideremos as superfícies planas

$$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, z = 1\}$$
$$P_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, z = -1\},$$

¹seu primo direito

e seja V o sólido limitado por HP , P_1 e P_0 :

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 + z^2, -1 < z < 1\}.$$

Aplicando o teorema da divergência, vem

$$\iiint_V \nabla \cdot f_{ac} = \iint_{HP} f_{ac} \cdot n + \iint_{P_1} f_{ac} \cdot n + \iint_{P_0} f_{ac} \cdot n,$$

onde n é a normal unitária exterior a V . Atendendo a que $n = (0, 0, 1)$ em P_1 , e $n = (0, 0, -1)$ em P_0 , obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{HP} f_{ac} \cdot n &= \iiint_V \nabla \cdot f_{ac} - \iint_{P_1} f_{ac} \cdot n - \iint_{P_0} f_{ac} \cdot n \\ &= \iiint_V -10^5 - \iint_{P_1} (-10^5) - \iint_{P_0} (-10^5) \\ &= -10^5 \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1+z^2}} \left(\int_0^{2\pi} \rho d\theta \right) d\rho \right) dz + 10^5 \text{vol}_2(P_1) + 10^5 \text{vol}_2(P_0) \\ &= -10^5 \pi \int_{-1}^1 (1 + z^2) dz + 4\pi 10^5 \\ &= \frac{4}{3} \pi 10^5. \end{aligned}$$

- (b) Seja $F(x, y, z) = (1, -1, 2x - 2y)$. Da igualdade $f_{dc}(x, y, z) = f_{ac}(x, y, z) + F(x, y, z)$ e do resultado da alínea (a), vem

$$\begin{aligned} \iint_{HP} f_{dc} \cdot n &= \iint_{HP} f_{ac} \cdot n + \iint_{HP} F \cdot n \\ &= \frac{4}{3} \pi 10^5 + \iint_{HP} F \cdot n. \end{aligned}$$

Pretendemos agora aplicar o teorema de Stokes para calcular o fluxo do campo vectorial F . Note-se que $\nabla \cdot F = 0$. Como F está definido em \mathbb{R}^3 , que é um conjunto em estrela, concluímos que F é um campo rotacional. Se A é um potencial vectorial para F , i.e., se $F = \nabla \times A$, então devemos ter

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 1 \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = -1 \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 2x - 2y \end{cases}$$

Como é sabido, o facto de o potencial vectorial estar definido a menos de um gradiente permite-nos sempre supor que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $A_1 = 0$. Então obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} = 2x - 2y \\ \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_3 = x + f(x, y) \\ A_1 = x^2 - 2xy + g(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher $g = 0$ e $f = y$. Um potencial vector para F é então

$$A = (0, x^2 - 2xy, x + y).$$

Aplicando o teorema de Stokes, vem

$$\iint_{\text{HP}} F \cdot n = \iint_{\text{HP}} \nabla \times A \cdot n = \int_{\partial \text{HP}} A \cdot d\alpha,$$

onde α é um caminho que percorre ∂HP no sentido compatível com a normal exterior n . Ora,

$$\begin{aligned} \partial \text{HP} &= C_1 \cup C_0 \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, z = 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, z = -1\}, \end{aligned}$$

pelo que α percorre C_1 no sentido horário e C_0 no sentido anti-horário, quando visto do ponto $(0, 0, 2)$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial \text{HP}} A \cdot d\alpha &= \int_0^{2\pi} A(\sqrt{2} \cos t, -\sqrt{2} \sin t, 1) \cdot (-\sqrt{2} \sin t, -\sqrt{2} \cos t, 0) dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} A(\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, -1) \cdot (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, 0) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos que $\iint_{\text{HP}} f_{dc} \cdot n = \frac{4}{3}\pi 10^5$, pelo que as medidas de Celestino não alteraram a situação.