Análise Matemática III
1º semestre de 2001/02

Episódio 12 (ou 3')[1]
Como terá reparado nem só os Gaudêncios têm tido uma vida difícil. As formigas não têm, com o decorrer da História, vivido propriamente num mar de rosas. Imagine que as descendentes das que sobreviveram ao circo de Marcelino G e à rampa infinita de Feriado G tiveram de se sujeitar às idiossincrasias do conhecido Ás do râguebi, Mário Gaudêncio. E que idiossincrasias! Não se sabe bem porquê, mas MG convenceu-se que uma bola de râguebi, cuja massa se concentra essencialmente na superfície, melhora se preenchida com esponja e se, antes de cada jogo, nessa esponja for colocada uma formiga[2], a qual se pode mover livremente pela esponja ou fixar-se em qualquer dos seus pontos. Felizmente que as formigas, animais de inteligência única, descobriram que há, no interior da bola, um ponto que se move de forma particularmente simples durante o jogo, provocando todos os restantes pontos uma grande dor de cabeça (e de antenas). Pelas leis da física de Isacus Netonus Formigus, estabelecidas já no ano de 3 012 224 AC (!), esse ponto é o centro de massa!

Sabendo que podemos desprezar a massa da esponja e da formiga, que a superfície da bola é dada por

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+\frac{z^2}{9} = 1\right\}$$

e que a densidade (superficial) de massa em S é (outra extravagância de MG)

$$\sigma(x,y,z) = \frac{(z-1)^2+1}{\sqrt{9-\frac{8}{9}z^2}} \ ,$$

determine a coordenada $\overline{z}$ da formiga, perdão, **do centro de massa da bola** S **(pela simetria do problema é claro que** $\overline{x} = \overline{y} = 0$).

Solução:

Temos primeiro de determinar a massa da bola que é dada pelo integral de superfície pela variedade-2 S da densidade de massa σ

$$M = \int_S \sigma \ .$$

A simetria do problema torna natural a utilização da seguinte parametrização da vizinhança de coordenadas $S \cap U$ de S, $S \cap U = S \setminus L$ (onde L é o subconjunto de S constituído pelos pontos com $y = 0$ e $x \geq 0$. L tem massa zero e portanto não contribui para a posição do centro de massa de S):

$$g \ : \ \begin{cases} x &= \cos(\theta)\mathrm{sen}(\varphi) \\ y &= \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\varphi) \ ; \qquad 0<\theta<2\pi \ , \ 0<\varphi<\pi \\ z &= 3\cos(\varphi) \end{cases}$$

[1] na numeração formiga, uma vez que adoptamos nesta narrativa o ponto de vista da ADFM, Associação de Defesa das Formigas Maltratadas.

[2] suspeita-se que este estranho hábito tenha a ver com misteriosas crenças supersticiosas de MG.

para a qual temos

$$Dg(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\varphi) & \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\mathrm{sen}(\varphi) & \mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 & -3\mathrm{sen}(\varphi) \end{pmatrix}$$

e portanto

$$Dg^t Dg = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}^2(\varphi) & 0 \\ 0 & \cos^2(\varphi) + 9\mathrm{sen}^2(\varphi) \end{pmatrix}$$

e

$$\sqrt{\det(Dg^t Dg)} = \mathrm{sen}(\varphi)\sqrt{9 - 8\cos^2(\varphi)}.$$

Então

$$\begin{aligned} M = \int_S \sigma &= \int_{S\setminus L} \sigma = \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma(x(\theta,\varphi), y(\theta,\varphi), z(\theta,\varphi))\sqrt{\det(Dg^t Dg)}\ d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(3\cos(\varphi)-1)^2+1}{\sqrt{9-8\cos^2(\varphi)}}\ \mathrm{sen}(\varphi)\sqrt{9-8\cos^2(\varphi)}\ d\theta d\varphi = \\ &= 2\pi\int_0^{\pi} \left((3\cos(\varphi)-1)^2+1\right)\mathrm{sen}(\varphi)\ d\varphi\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Fazendo em (1) a mudança de coordenadas $u = -\cos(\varphi)$ temos

$$\begin{aligned} M &= 2\pi\int_{-1}^{1}\left(9u^2+6u+2\right) du = \\ &= 2\pi\left(3u^3+3u^2+2u\right)\big|_{-1}^{1} = 20\pi\ . \end{aligned}$$

Para a coordenada $\overline{z}$ do centro de massa da bola tem-se assim

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \frac{1}{M}\int_S z\sigma = \int_{S\setminus L} z\sigma = \\ &= \frac{1}{20\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 3\cos(\varphi)\left((3\cos(\varphi)-1)^2+1\right)\mathrm{sen}(\varphi)\ d\theta d\varphi = \\ &= -\frac{3}{10}\int_{-1}^{1}\left(9u^3+6u^2+2u\right) du = \\ &= -\frac{3}{10}\ 4 = -\frac{6}{5}. \end{aligned}$$