Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício Teste 12 (entregar na última aula prática - semana de 10/1/00 a 14/1/00)
1) Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = \frac{\sin(xyz)}{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{7}{4}}}.$$

Decida se f é integrável em $\mathbb{R}^3$. Justifique. Em caso afirmativo escreva o integral de f em $\mathbb{R}^3$ como um limite.

2) Considere uma distribuição de carga eléctrica no intervalo $[0,2\pi] \subset \mathbb{R}$ dada pela densidade de carga por unidade de comprimento dependente do tempo $\rho(x,t) = t^3 \sin^2(tx + (t-1)x^2)$, onde t é o tempo e $x \in [0,2\pi]$. Calcule $Q'(1)$ onde $Q(t)$ é a carga eléctrica total no intervalo $[0,2\pi]$ no instante t.

Solução:

$f(x,y,z)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^3$. A integrabilidade ou não de f será decidida pela rapidez com que o $|f|$ decai quando $r \to \infty$. Como f tem o termo $\sin(xyz)$ cujo módulo é fácil de majorar e que não tem um comportamento monótono, vamos utilizar o teorema da convergência dominada de Lebesgue. Seja $S_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2+y^2+z^2) \leq k^2\}$.

Vamos definir

$$f_k(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{se } (x,y,z) \in S_k \\ 0 & \text{se } (x,y,z) \notin S_k. \end{cases}$$

Temos que $f_k \in L(\mathbb{R}^3)$ para todo o k, já que para todo o k, S_k é compacto, f_k é contínua e limitada no interior de S_k e é zero fora de S_k.

Temos que $\lim_{k\to\infty} f_k(x,y,z) = f(x,y,z)$ para todo o $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Temos $|\sin(xyz)| \leq 1$, logo temos que $|f_k(x,y,z)| \leq h(x,y,z)$ onde $h(x,y,z) = \frac{1}{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{7}{4}}}$. Se mostrarmos que $h \in L(\mathbb{R}^3)$ então o TCDL implica que $f \in L(\mathbb{R}^3)$.

Vamos então mostrar que $h \in L(\mathbb{R}^3)$, usando o teorema da convergência monótona:

Seja

$$h_k(x,y,z) = \begin{cases} h(x,y,z) & \text{se } (x,y,z) \in S_k \\ 0 & \text{se } (x,y,z) \notin S_k. \end{cases}$$

Então para todo o k tem-se $h_k \in L(\mathbb{R}^3)$, já que h_k é contínua e limitada no interior de S_k, é zero fora de S_k e S_k é compacto.

A sucessão $\{h_k\}$ é monótona crescente porque $h(x,y,z) \geq 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} h_k = \int_{S_k} h_k = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^k dr (r^2 \sin(\phi)) \frac{1}{1+r^{\frac{7}{2}}} =$$

$$= 4\pi \int_0^k dr r^2 \frac{1}{1+r^{\frac{7}{2}}} \leq 4\pi + 4\pi \int_1^k dr r^{-\frac{3}{2}} = 4\pi + 8\pi(1 - 1/\sqrt{k}).$$

Logo a sucessão $\{\int_{\mathbb{R}^3} h_k\}$ é limitada e o TCML implica que $h \in L(\mathbb{R}^3)$.

Logo também temos que $f \in L(\mathbb{R}^3)$ e que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f = \lim_{k\to\infty} \int_{S_k} f_k = \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^k dr (r^2 \sin(\phi)) \frac{\sin(r^3 \cos^2(\phi)\sin(\phi)\cos(\theta)\sin(\theta))}{1+r^{\frac{7}{2}}}.$$

2) A carga eléctrica total é dada pelo integral da densidade de carga:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} t^3 \sin^2(tx + (t-1)x^2) dx.$$

A função $\rho(x,t)$ é contínua e tem derivadas contínuas em t para $x, t \in \mathbb{R}$, e o intervalo $[0, 2\pi]$ é compacto. Podemos portanto aplicar a regra de Leibniz para calcular $Q'(1)$:

$$Q'(t) = \int_0^{2\pi} 3t^2 \sin^2(tx + (t-1)x^2)dx + \int_0^{2\pi} t^3 \sin(2tx + 2(t-1)x^2)(x + x^2)dx.$$

Logo,

$$Q'(1) = \int_0^{2\pi} 3\sin^2(x)dx + \int_0^{2\pi} \sin(2x)(x + x^2)dx = \pi - \pi - 2\pi^2 = -2\pi^2.$$