Análise Matemática III
2º semestre de 2000/2001

Exercício Teste 12

Enunciado: Seja $a > 0$ e sejam N_a os sub-conjuntos da variedade do exercício-teste 10 definidos por

$$N_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + y = (z - y)^2 + x^2,\ 2x^2 + 4(z - y)^2 < a\}.$$

a) Calcule a área de N_1. (Sugestão: Recorde que já parametrizou estas variedades no exercício-teste 10.)

b) Suponha que sobre N_a está disposta uma distribuição de carga eléctrica de densidade de carga (por unidade de área) dada por $\sigma(x, y, z) = 1 + 2x^2 + 4(z - y)^2$. Calcule o valor de a para o qual a carga total da superfície N_a é igual a π.

Solução:

a) Recordemos a parametrização utilizada no exercício-teste 10: Seja $u = z + y$ e $v = z - y$. Em termos de coordenadas x, u, v vemos que M é um parabolóide de revolução com o eixo de simetria sendo o eixo dos u dado por $u = v^2 + x^2$. Logo, como $z = 1/2u + 1/2v$ e $y = 1/2u - 1/2v$ uma parametrização para M será $g(x, v) = (x(x, v), y(x, v), z(x, v)) = (x, (1/2)(v^2 + x^2 - v), (1/2)(v^2 + x^2 + v))$, para $x, v \in \mathbb{R}$.

Para parametrizar N_a devemos tomar as coordenadas x, v no interior da elipse de equação $2x^2 + 2v^2 < a$.

Temos então

$$Dg(x, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & v - 1/2 \\ x & v + 1/2 \end{bmatrix}.$$

Sendo $D_x g$ e $D_v g$ respectivamente a primeira e segunda colunas de Dg temos

$$V(D_x g, D_v g) = \sqrt{\det Dg^t Dg} = ||D_x g \times D_v g|| = \left(\det \begin{bmatrix} 1 + 2x^2 & 2xv \\ 2xv & 2v^2 + 1/2 \end{bmatrix}\right)^{1/2} =$$

$$= (1/\sqrt{2})\sqrt{1 + 2x^2 + 4v^2}.$$

Para calcular a área de N_1 temos de integrar $V(D_x g, D_v g)$ na região elipsoidal $S \subset \mathbb{R}^2$ definida por $2x^2 + 4v^2 < 1$:

$$Area(N_1) = \int_S V(D_x g, D_v g) dx dv = \int_S (1/\sqrt{2})\sqrt{1 + 2x^2 + 4v^2} dx dv.$$

É mais fácil calcular o integral introduzindo coordenadas apropriadas à região S, $\sqrt{2}x = r\cos(\theta)$, $2v = r\mathrm{sen}(\theta)$, com $0 < \theta < 2\pi$ e $0 < r < 1$. Temos $2x^2 + 4v^2 = r^2$. O Jacobiano da transformção é $(1/2\sqrt{2})r$ e assim,

$$Area(N_1) = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} V(D_x g, D_v g)(1/2\sqrt{2}) r d\theta\right) dr = \frac{2\pi}{4}\int_0^1 r\sqrt{1 + r^2} dr = (\sqrt{8} - 1)\pi/6.$$

b) A superfície N_a é descrita pela parametrização $g(x, v)$ com $2x^2 + 4v^2 < a$. Em coordenadas (r, θ) como na alínea anterior temos então $0 < r < \sqrt{a}, 0 < \theta < 2\pi$. Em termos de r, θ temos $\sigma = 1 + 2x^2 + 4v^2 = 1 + r^2$. Logo, a carga total de N_a é

$$Q_a = \int_{N_a} \sigma = \int_0^{\sqrt{a}} \left(\int_0^{2\pi} (1 + r^2)(1/\sqrt{2})\sqrt{1 + r^2}(1/2\sqrt{2}) r d\theta\right) dr =$$

$$= \frac{\pi}{10}((1 + a)^{5/2} - 1).$$

Logo, quando $a = 11^{2/5} - 1$ temos carga total igual a π.