

Análise Matemática III

1º semestre de 2002/2003

Exercício teste 12 (a entregar na aula prática da semana de 9/12/2002)

Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = z, 0 < z < 2\}$$

e o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x - 1, y - 1, z).$$

Calcule o fluxo de F através de M , no sentido da normal que tem a terceira componente negativa no ponto $(1, 2, 1)$,

1. pela definição de fluxo.
2. usando o teorema da divergência.

Resolução

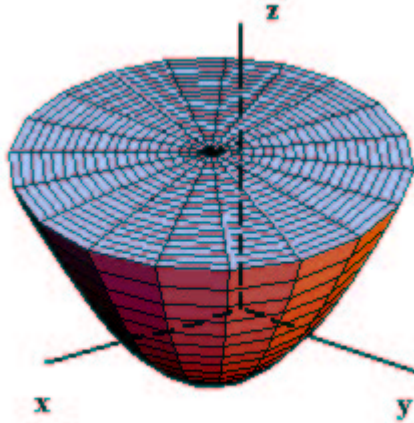
1. Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) , temos

$$x = 1 + \rho \cos \theta$$

$$y = 1 + \rho \sin \theta$$

$$z = z$$

e M é definida por $\rho^2 = z$ com $0 < \rho < \sqrt{2}$. Portanto M obtém-se a partir de uma parábola rodada em torno da recta vertical dada pelas equações $x = 1, y = 1$, ou seja, M é um parabolóide.



Uma parametrização para M é dada por

$$g(\rho, \theta) = (1 + \rho \cos \theta, 1 + \rho \sin \theta, \rho^2), \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \rho < \sqrt{2}.$$

Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & 2\rho \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (-2\rho^2 \cos \theta, -2\rho^2 \sin \theta, \rho).$$

Este vector tem sempre a 3ª componente positiva, portanto é necessário trocar o sinal para calcular o fluxo.

$$\begin{aligned} \int_M F \cdot n \, dS &= \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} F(1 + \rho \cos \theta, 1 + \rho \sin \theta, \rho^2) \cdot (2\rho^2 \cos \theta, 2\rho^2 \sin \theta, -\rho) \, d\rho d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2) \cdot (2\rho^2 \cos \theta, 2\rho^2 \sin \theta, -\rho) \, d\rho d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho = 2\pi. \end{aligned}$$

2. F é um campo vectorial de classe C^1 em \mathbb{R}^3 logo podemos aplicar o teorema da divergência à região

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 < z, \quad 0 < z < 2\}.$$

A fronteira de D é formada por M e pelo disco

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2, z = 2\}.$$

Uma vez que a normal a M dada é a normal exterior a D , o teorema da divergência diz que

$$\int_D \operatorname{div} F \, dx dy dz = \int_M F \cdot n \, dS + \int_S F \cdot (0, 0, 1) \, dS$$

onde $(0, 0, 1)$ é a normal exterior ao disco S .

Como $\operatorname{div} F = 3$ conclui-se que

$$\int_M F \cdot n \, dS = 3\operatorname{vol}(D) - \int_S F \cdot (0, 0, 1) \, dS.$$

Temos

$$\operatorname{vol}(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\rho^2}^2 \rho \, dz d\rho d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho - \rho^3) \, d\rho = 2\pi$$

e visto que no disco S o campo F é dado por $F(x, y, z) = (x - 1, y - 1, 2)$ obtemos

$$\int_S F \cdot (0, 0, 1) \, dS = \int_S 2 \, dS = 2\operatorname{área}(S) = 2\pi(\sqrt{2})^2 = 4\pi.$$

Podemos assim concluir que

$$\int_M F \cdot n \, dS = 6\pi - 4\pi = 2\pi.$$